

CAPÍTULO 6: DISEÑO DEL EXPERIMENTO Y ANÁLISIS DE RESULTADOS.

Es importante familiarizarse con los fundamentos del diseño experimental, así que se dedicarán los primeros párrafos de este capítulo a reseñarlos.

ALGO DE HISTORIA.

Montgomery¹ habla de cuatro eras del desarrollo moderno del diseño experimental estadístico:

La era agrícola, encabezada por Sir Ronald A. Fisher entre los 20's y los 30's. En este período, Fisher fue el responsable de las estadísticas y el análisis de datos en la Estación Agrícola Experimental de Rothamsted en las cercanías de Londres, Inglaterra. Fisher se percató de que las fallas en la forma en que se llevaba a cabo el experimento que generaba los datos obstaculizaban con frecuencia el análisis de los datos de los sistemas (en este caso sistemas agrícolas). Mediante la interacción con múltiples científicos e investigadores de diversos campos, Fisher desarrolló las ideas que llevaron a los tres principios básicos del diseño experimental que se presentarán en la siguiente sección. Fisher incorporó de manera sistemática el pensamiento y los principios estadísticos en el diseño de las investigaciones experimentales, incluyendo el concepto de diseño factorial y el análisis de varianza. Sus libros tuvieron profunda influencia en el uso de la estadística en la agricultura y las ciencias biológicas relacionadas.

La era industrial se inició en la década de los 30's y un catalizador importante fue el desarrollo de la metodología de superficies de respuesta (MSR) por parte de Box y Wilson. Estos autores se percataron y explotaron el hecho de que muchos experimentos industriales son fundamentalmente diferentes de sus contrapartes agrícolas en dos sentidos: primero, la variable de respuesta puede observarse en muchas ocasiones casi de inmediato y segundo, el experimentador puede obtener pronto información crucial de un pequeño grupo de corridas que puede usarse para planear el siguiente experimento. Box denomina *inmediatez* y *secuencialidad* a estas dos características de los experimentos industriales. En los treinta

años siguientes, la MSR y otras técnicas de diseño se generalizaron en las industrias química y de proceso, sobre todo en el trabajo de investigación y desarrollo. George Box fue el líder intelectual de este movimiento. Sin embargo, la aparición del diseño estadístico a nivel de plantas o procesos de manufactura todavía no estaba muy generalizada. Algunas razones de ello incluyen la capacitación inadecuada de ingenieros y otros especialistas en procesos en los conceptos y los métodos estadísticos básicos, así como la falta de recursos de computación y software de estadística que fueran fáciles de usar para apoyar la aplicación de experimentos diseñados estadísticamente.

La era de la calidad comenzó a finales de los 70's con el interés creciente de la industria occidental en el mejoramiento de la calidad. El trabajo de Genichi Taguchi tuvo un impacto significativo en el aumento del interés y el uso de los experimentos diseñados. Taguchi elaboró el concepto de diseño paramétrico robusto, es decir: 1) hacer procesos insensibles a los factores ambientales o de otra índole que son difíciles de controlar, 2) fabricar productos insensibles a la variación transmitida por los componentes y 3) encontrar los niveles de las variables del proceso que obliguen a la media a un valor deseado mientras que al mismo tiempo se reduzca la variabilidad en torno a ese valor. Taguchi propuso diseños factoriales altamente fraccionados y otros arreglos ortogonales junto con algunos métodos estadísticos nuevos para resolver estos problemas. La metodología resultante generó muchas discusiones y controversias. Parte de la controversia surgió porque en Occidente la metodología de Taguchi fue defendida por los empresarios, y no se había hecho la revisión escrutadora adecuada de la ciencia estadística fundamental. Para fines de los 80's, los resultados de esta revisión indicaron que aún cuando los conceptos y los objetivos enfocados en la ingeniería de Taguchi tenían bases sólidas, existían problemas sustanciales con su estrategia experimental y sus métodos para el análisis de datos. De la controversia, surgieron por lo menos tres resultados positivos: primero, se generalizó el uso del diseño de experimentos en las industrias con piezas discretas, incluyendo la industria de manufacturas automotrices y aeroespaciales, de electrónica y semiconductores, y muchas otras, que anteriormente hacían poco uso de esta técnica; segundo, se inició la cuarta era del diseño estadístico. Esta era ha incluido un renovado interés general tanto por parte de investigadores como de profesionales en ejercicio en el diseño estadístico y el desarrollo de

varios enfoques nuevos y útiles para los problemas experimentales en el mundo industrial, incluyendo alternativas a los métodos técnicos de Taguchi que permiten que sus conceptos de ingeniería se lleven a la práctica de manera eficaz y eficiente; y tercero, la educación formal en diseño experimental estadístico se está haciendo parte de los programas de ingeniería en las universidades, tanto a nivel de licenciatura como de postgrado. La integración exitosa de una buena práctica del diseño experimental en la ingeniería y las ciencias es un factor clave en la competitividad industrial futura.

PRINCIPIOS BÁSICOS DEL DISEÑO EXPERIMENTAL.

Si se desea llevar a cabo un experimento lo más eficiente posible, es necesario utilizar un enfoque científico para plantearlo. El diseño estadístico de experimentos se refiere al proceso para planear el experimento de tal forma que se recaben datos adecuados que puedan analizarse con métodos estadísticos que llevarán a conclusiones válidas y objetivas. El enfoque estadístico del diseño experimental es necesario si se quieren sacar conclusiones significativas de los datos. Cuando el problema incluye datos que están sujetos a errores experimentales, la metodología estadística es el único enfoque objetivo de análisis. Por lo tanto, cualquier problema experimental incluye dos aspectos: el diseño del experimento y el análisis estadístico de los datos. Estos dos aspectos se encuentran íntimamente relacionados porque el método del análisis depende directamente del diseño empleado.

Los tres principios básicos del diseño experimental son la **realización de réplicas**, la **aleatorización** y la **formación de bloques**.

Por **realización de réplicas** se entiende la repetición del experimento básico (en el caso de esta tesis, se hicieron dos réplicas para cada tipo de concreto). La realización de réplicas posee dos propiedades importantes. Primera, permite al experimentador obtener una estimación del error experimental. Esta estimación del error se convierte en una unidad de medición básica para determinar si las diferencias observadas en los datos son en realidad estadísticamente diferentes. Segunda, si se usa la media muestral (por ejemplo, \bar{y}) para estimar el efecto de un factor en el experimento, la realización de réplicas permite al experimentador obtener una estimación más precisa de este efecto. Por ejemplo, si σ^2 es la

varianza de una observación individual y hay n réplicas, la varianza de la media muestral

$$\text{es } \sigma_{\bar{y}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

La consecuencia práctica de lo anterior es que si no se hacen réplicas, las inferencias hechas para los datos no serán satisfactorias, pues las diferencias observadas podrían deberse al error experimental y no ser diferencias sustanciales. Por otra parte, si n es razonablemente grande y el error experimental es suficientemente pequeño, las diferencias observadas quedan claramente definidas.

Hay una diferencia importante entre réplicas y **mediciones repetidas**, ya que estas últimas sirven para evaluar sólo el error de medición, no el error puro (en el caso de esta tesis, se hicieron cinco mediciones repetidas para cada réplica de cada tipo de concreto).

La **aleatorización** es la piedra angular en la que se fundamenta el uso de los métodos estadísticos en el diseño experimental. Por aleatorización se entiende que tanto la asignación del material experimental como el orden en que se realizarán las corridas o ensayos individuales del experimento se determinan al azar. Uno de los requisitos de los métodos estadísticos es que las observaciones (o los errores) sean variables aleatorias con distribuciones independientes. La aleatorización hace por lo general que este supuesto sea válido. La aleatorización correcta del experimento ayuda también a “sacar del promedio” los efectos de factores extraños que pudieran estar presentes (en el caso de esta tesis, por ejemplo, la aleatorización ayuda a eliminar el efecto de fatiga que pudiera sufrir la máquina universal de carga, pero su principal función fue la de validar las técnicas estadísticas utilizadas).

Es muy común el uso de programas de computadora para auxiliar a los experimentadores a seleccionar y construir sus diseños experimentales (en esta tesis se usó MINITAB para generar números aleatorios).

La **formación de bloques** es una técnica de diseño que se utiliza para mejorar la precisión de las comparaciones que se hacen entre los factores de interés. Muchas veces la formación de bloques se emplea para reducir o eliminar la variabilidad transmitida por **factores**

perturbadores; es decir, aquellos factores que pueden influir en la respuesta experimental pero en los que no hay un interés específico (en el caso de esta tesis sólo se estudió un bloque: el de las mezclas con componentes en proporción 1:4:4; otros bloques no resultaron necesarios para comparar las tenacidades, pues el cambio en las proporciones generaría un cambio idéntico en la tenacidad de cada uno de los tres tipos de concreto).

PAUTAS GENERALES PARA DISEÑAR EXPERIMENTOS.

Para aplicar el enfoque estadístico en el diseño y análisis de un experimento, es necesario que todos los que participan en el mismo tengan desde el principio una idea clara de qué es exactamente lo que va a estudiarse, cómo van a coleccionarse los datos, y al menos una comprensión cualitativa de la forma en que van a analizarse estos datos.

En esta sección se describe el procedimiento recomendado para diseñar experimentos.

1. Identificación y enunciación del problema. Este punto podría parecer obvio, sin embargo, en la práctica es difícil darse cuenta de que existe un problema que requiere experimentación, y tampoco es fácil una enunciación clara de este problema con la que todos estén de acuerdo. Es necesario desarrollar todas las ideas acerca de los objetivos del experimento. Generalmente, es importante solicitar aportaciones de todas las áreas involucradas: ingeniería, aseguramiento de calidad, manufactura, mercadotecnia, administración, el cliente y el personal de operación (el cual por lo general conoce a fondo el proceso y al que con demasiada frecuencia se ignora). Por esta razón, se recomienda un enfoque de equipo para diseñar experimentos. En la mayoría de los casos es conveniente hacer una lista de los problemas o las preguntas específicas que van a abordarse en el experimento. Una enunciación clara del problema contribuye sustancialmente a menudo para alcanzar una mejor comprensión de los fenómenos bajo estudio y la solución final del problema. También es importante tener presente el objetivo global; por ejemplo, ¿Se trata de un proceso o sistema nuevo (en cuyo caso el objetivo inicial posiblemente será la caracterización o tamizado de los factores) o se trata de un sistema maduro que se conoce con profundidad razonable y que se ha caracterizado con anterioridad (en cuyo caso el objetivo puede ser la optimización)? En un

experimento puede haber muchos objetivos posibles, incluyendo la confirmación (¿El sistema se comporta de la misma manera ahora que en el pasado?), el descubrimiento (¿Qué ocurre si se exploran nuevos materiales, variables, condiciones de operación, etc.?) y la estabilidad (¿Bajo qué condiciones las variables de respuesta de interés sufren una degradación seria?). Obviamente, las cuestiones específicas que habrán de abordarse en el experimento se relacionan de manera directa con los objetivos globales. Con frecuencia en esta etapa de la formulación del problema muchos ingenieros y científicos se percatan de que no es posible que un experimento comprensivo extenso responda las cuestiones clave y de que un enfoque secuencial en el que se utilice una serie de experimentos más pequeños en una estrategia más adecuada.

2. Elección de los factores, los niveles y los rangos. Cuando se consideran los factores que pueden influir en el desempeño de un proceso o sistema, el experimentador suele descubrir que estos factores pueden clasificarse como factores potenciales del diseño o bien como factores perturbadores. Los factores potenciales del diseño son aquéllos que el experimentador posiblemente quiera hacer variar en el experimento. Es frecuente encontrar que hay muchos factores potenciales del diseño, por lo que es conveniente contar con alguna clasificación adicional de los mismos. Algunas clasificaciones útiles son factores del diseño, factores que se mantienen constantes y factores a los que se permite variar. Los factores del diseño son los que se seleccionan realmente para estudiarlos en el experimento. Los factores que se mantienen constantes son variables que pueden tener cierto efecto sobre la respuesta, pero que para los fines del experimento en curso no son de interés, por lo que se mantendrán fijos en un nivel específico. Como un ejemplo de factores a los que se permite variar, las unidades experimentales o los “materiales” a los que se aplican los factores del diseño no son homogéneos por lo general, no obstante lo cual con frecuencia se ignora esta variabilidad de una unidad a otra y se confía en la aleatorización para compensar cualquier efecto del material o la unidad experimental. Muchas veces se trabaja con el supuesto de que los efectos de los factores que se mantienen constantes y de los factores a los que se permite variar

son relativamente pequeños. Por otra parte, los factores perturbadores pueden tener efectos considerables que deben tomarse en consideración, a pesar de que no haya interés en ellos en el contexto del experimento en curso. Los factores perturbadores suelen clasificarse como factores controlables, no controlables o de ruido. Un factor perturbador controlable es aquél cuyos niveles pueden ser ajustados por el experimentador. Si un factor perturbador no es controlable en el experimento, pero puede medirse, muchas veces puede usarse en el procedimiento del análisis denominado análisis de covarianza para compensar este efecto. Cuando un factor que varía de manera natural y no controlable en el proceso puede controlarse para los fines de un experimento, con frecuencia se le llama factor de ruido. En tales situaciones, es común que el objetivo sea encontrar los ajustes de los factores controlables del diseño que minimicen la variabilidad transmitida por los factores de ruido. En ocasiones a esto se le llama el estudio de robustez del proceso o el problema de robustez del diseño. Una vez que el experimentador ha seleccionado los factores del diseño, debe elegir los rangos en los que hará variar estos factores, así como los niveles específicos con los que se realizarán las corridas. También deberá pensarse cómo van a controlarse estos factores en los valores deseados y cómo van a medirse. El ingeniero también tendrá que tomar una decisión en cuanto a la región de interés para cada variable (es decir, el rango en el que se hará variar cada factor) y en cuanto al número de niveles de cada variable que usará. Para ello se requiere del conocimiento del proceso. Este conocimiento del proceso suele ser una combinación de experiencia práctica y conocimientos teóricos. Es importante investigar todos los factores que pueden ser de importancia y no dejarse influir demasiado por la experiencia pasada, en particular cuando uno se encuentra en las fases iniciales de la experimentación o cuando el proceso no está del todo maduro. Cuando el objetivo del experimento es el tamizado de los factores o caracterización del proceso, por lo general es mejor mantener reducido el número de niveles de los factores. En general, dos niveles funcionan bastante bien en los estudios de tamizado de factores. Elegir la región de interés también es importante. En el tamizado de factores, la región de interés deberá ser relativamente grande; es decir,

el rango en el que se hacen variar los factores deberá ser amplio. Conforme se sepa más acerca de las variables que son importantes y de los niveles que producen los mejores resultados, la región de interés se hará por lo general más estrecha.

3. Selección de la variable de respuesta. Para seleccionar la variable de respuesta, el experimentador deberá tener la certeza de que esta variable proporciona en realidad información útil acerca del proceso bajo estudio. En la mayoría de los casos, el promedio y / o la desviación estándar de la característica medida será la variable de respuesta. No son la excepción las respuestas múltiples. La eficiencia de los instrumentos de medición (o error de medición) también es un factor importante. Si la eficiencia de los instrumentos de medición es inadecuada, el experimentador sólo detectará los efectos relativamente grandes de los factores o quizá sean necesarias réplicas adicionales. En algunas situaciones en que la eficiencia de los instrumentos de medición es pobre, el experimentador puede decidir medir varias veces cada unidad experimental y usar el promedio de las mediciones repetidas como respuesta observada. Suele ser de importancia determinante identificar los aspectos relacionados con la definición de las respuestas de interés y cómo van a medirse antes de llevar a cabo el experimento. En ocasiones se emplean experimentos diseñados para estudiar y mejorar el desempeño de los sistemas de medición.

Se reitera lo crucial que es exponer todos los puntos de vista y la información del proceso en los pasos 1 – 3 anteriores (planeación previa al experimento).

4. Elección del diseño experimental. Si las actividades de planeación previas al experimento se realizan como es debido, este paso es relativamente sencillo. La elección del diseño implica la consideración del tamaño de la muestra (número de réplicas), la selección de un orden de corridas adecuado para los ensayos experimentales y la determinación de si entran en juego o no la formación de bloques u otras restricciones sobre la aleatorización. Al seleccionar el diseño, es importante tener en mente los objetivos experimentales. En muchos experimentos de ingeniería se sabe de antemano que algunos de los niveles de los factores producirán valores diferentes de la respuesta. En consecuencia, el interés se centra

en identificar qué factores causan esta diferencia y en estimar la magnitud del cambio de la respuesta. En otras situaciones podría haber más interés en verificar la uniformidad.

5. Realización del experimento. Cuando se lleva a cabo el experimento es vital monitorear con atención el proceso a fin de asegurarse de que todo se esté haciendo conforme a la planeación. Los errores en el procedimiento experimental en esta etapa destruirán por lo general la validez experimental. Poner en un primer plano la planeación es crucial para el éxito. Es fácil subestimar los aspectos de logística y planeación cuando se corre un experimento diseñado en un ambiente complejo de manufactura o de investigación y desarrollo. Algunas corridas de prueba son convenientes porque proporcionan información acerca de la consistencia del material experimental, una comprobación del sistema de medición, una idea aproximada del error experimental y la oportunidad de poner en práctica la técnica experimental global. Esto ofrece también una oportunidad para revisar, de ser necesario, las decisiones tomadas en los pasos 1 – 4.
6. Análisis estadístico de los datos. Deberán usarse métodos estadísticos para analizar los datos a fin de que los resultados y las conclusiones sean objetivos y no de carácter apreciativo. Si el experimento se ha diseñado correctamente y si se ha llevado a cabo de acuerdo con el diseño, los métodos estadísticos necesarios no deben ser complicados. Con frecuencia se encuentra que los métodos gráficos simples desempeñan un papel importante en el análisis e interpretación de datos. Debido a que muchas de las preguntas que el experimentador quiere responder pueden insertarse en el marco de la prueba de hipótesis, los procedimientos para probar hipótesis y estimar intervalos de confianza son muy útiles en el análisis de datos de un experimento diseñado. Muchas veces es muy útil también presentar los resultados de varios experimentos en términos de un modelo empírico, es decir, mediante una ecuación derivada de los datos que expresa la relación entre la respuesta y los factores importantes del diseño. El análisis residual y la verificación de la adecuación del modelo son también técnicas de análisis importantes.

Recuérdese que los métodos estadísticos no pueden demostrar que un factor (o factores) posee un efecto particular, sólo proporcionan pautas generales en cuanto a la confiabilidad y la validez de los resultados. Aplicados en forma correcta, los métodos estadísticos no permiten la demostración experimental de nada, pero sí sirven para medir el error posible en una conclusión o asignar un nivel de confianza a un enunciado. La ventaja principal de los métodos estadísticos es que agregan objetividad al proceso de toma de decisiones. Las técnicas estadísticas, aunadas a una buena ingeniería o conocimiento del proceso y el sentido común, llevarán por lo general a conclusiones sólidas.

7. Conclusiones y recomendaciones. Una vez que se han analizado los datos, el experimentador debe sacar conclusiones prácticas acerca de los resultados y recomendar un curso de acción. Los métodos gráficos suelen ser útiles en esta etapa, en particular para presentar los resultados. También deberán realizarse corridas de seguimiento o pruebas de confirmación para validar las conclusiones del experimento.

RECOMENDACIONES PARA EL EXPERIMENTADOR.

El uso correcto de las técnicas estadísticas en la experimentación requiere que el experimentador tenga presentes los siguientes puntos:

1. **Uso de conocimientos no estadísticos del problema.** Este tipo de conocimientos es invaluable para explicar las relaciones entre los factores y las respuestas, para elegir los factores, determinar los niveles de los factores, decidir cuántas réplicas correr, interpretar los resultados del análisis, etc.
2. **Mantener el diseño y el análisis tan simple como sea posible.** Es necesario no exagerar en el uso de técnicas estadísticas complejas y sofisticadas. Los métodos de diseño y análisis relativamente simples son siempre los mejores¹. Si un diseño se hace de manera cuidadosa y correcta, el análisis casi siempre será relativamente directo. Sin embargo, si el diseño se estropea grandemente por ineptitud, no es posible que incluso la estadística más compleja y elegante salve la situación.

3. **Tener presente la diferencia entre significación práctica y significación estadística.** Debido a que justamente dos condiciones experimentales producen respuestas medias que son estadísticamente diferentes, no existe ninguna seguridad de que esta diferencia sea de la magnitud suficiente como para tener algún valor práctico. Por ejemplo, si la modificación de un sistema de inyección de combustible permite un incremento en el rendimiento que se considere estadísticamente significativo, tal incremento no tendrá ninguna significación práctica si el costo de la modificación resulta exorbitante.
4. **Los experimentos son generalmente iterativos.** Cuando se inicia un estudio, es conveniente diseñar un experimento poco comprensivo, ya que esta etapa constituye un proceso de aprendizaje, se suele invertir menos del 25% de los recursos en estos experimentos iniciales. A medida que va aprendiendo, el experimentador puede establecer mucho mejor los factores importantes, sus rangos de variación, el número apropiado de niveles para cada factor y los métodos y las unidades de medición adecuados para cada factor y respuesta. Este hecho permitirá diseños más comprensivos cada vez, por lo que el enfoque iterativo o secuencial es más común que la elaboración de un único experimento que pretenda ser totalmente comprensivo.

DESCRIPCIÓN DEL DISEÑO EXPERIMENTAL.

Antes de comenzar con la descripción del diseño experimental, cabe mencionar que los datos a comparar (las tenacidades) tienen una peculiaridad: son magnitudes físicas que no se pueden medir directamente. Este hecho hizo necesario involucrar en el diseño del experimento esfuerzos y deformaciones (sí medibles directamente), ya que calculando el área bajo cada curva Esfuerzo – Deformación, estimada con un análisis de regresión, se pueden evaluar las tenacidades.

Los tres concretos probados fueron:

1. Elaborado con Cemento Pórtland (CC).
2. Elaborado con polímeros especiales para este fin (CP).

3. Elaborado con polímeros obtenidos del reciclado de envases de polietilentereftalato (CP-PET).

Los tres tratamientos fueron replicados, por lo cual se llevaron a cabo seis corridas experimentales: dos de CC (CC1 y CC2), dos de CP (CP1 y CP2) y dos de CP-PET (CP-PET1 y CP-PET2). Cada mezcla se elaboró en un día. Se hicieron en seis días consecutivos.

Cada una de estas seis mezclas satisfizo las siguientes condiciones:

- Cada una de las seis tuvo un volumen de diez litros (60 litros en total).
- Cada una se elaboró con las mismas proporciones de agregados: 4 unidades de volumen de grava, 4 unidades de volumen de arena y 1 unidad de volumen de gel cementante (agua – cemento, o polímero y agente de entrecruzamiento).

Lo anterior quiere decir que para preparar las mezclas se usó un total de 26.67 litros de grava (que pasó un tamiz cuadrado de 8 mm de lado), 26.67 litros de arena (que pasó un tamiz de 0.25 mm de diámetro), 2.22 litros de gel de agua-cemento, 2.22 litros de un polímero comercial y su agente de entrecruzamiento y 2.22 litros de polímero reciclado de PET (poliéster insaturado con estireno) y octoato de cobalto y peróxido de metil etil cetona como agente de entrecruzamiento. Lo cual da el volumen total de 60 litros.

- Se asignó un número aleatorio a cada una de las seis mezclas para su orden de elaboración, quedando el siguiente:

Orden de elaboración de la mezcla	Tipo de mezcla
1	CP2
2	CP-PET1
3	CC1
4	CC-PET2
5	CP1
6	CC2

Tabla 6.1 Aleatorización para el orden de elaboración de mezclas

- De cada mezcla, se tomó una muestra del 50% del volumen: cinco especímenes cúbicos, de 10 cm de arista, que de aquí en adelante llamaremos probetas.
- Las 30 probetas fueron engrasadas interiormente con aceite mineral y llenadas con el mismo procedimiento: en dos etapas con mezclado manual y engrasando con una regla.
- Cada probeta se marcó así (el primer número indica la muestra de la que proviene la probeta y el segundo, el orden en el que fue llenada tal probeta):

CC11	CC12	CC13	CC14	CC15	CC21	CC22	CC23	CC24	CC25
CP11	CP12	CP13	CP14	CP15	CP21	CP22	CP23	CP24	CP25
CP-PET 11	CP-PET 12	CP-PET 13	CP-PET 14	CP-PET 15	CP-PET 21	CP-PET 22	CP-PET 23	CP-PET 24	CP-PET 25

Tabla 6.2 Denominación de las probetas

- Todas las probetas se dejaron reposar 28 días a temperatura ambiente, recubiertas con una emulsión comercial, para evitar pérdida de agua por evaporación.
- A los 28 días, se sacaron las probetas de sus moldes cuidadosamente y se les asignaron números aleatorios a todas, para establecer el orden en el que serían probadas en la máquina universal de carga, quedando el orden mostrado en la tabla siguiente:

Orden de prueba de carga	Tipo de Probeta	Orden de prueba de carga	Tipo de Probeta	Orden de prueba de carga	Tipo de Probeta
1	CP13	11	CP-PET15	21	CC13
2	CP-PET11	12	CP24	22	CC14
3	CP-PET21	13	CP23	23	CP-PET13
4	CC22	14	CP22	24	CC15

5	CP-PET14	15	CP25	25	CC12
6	CC24	16	CP-PET24	26	CC23
7	CP15	17	CC25	27	CP-PET22
8	CP-PET25	18	CP14	28	CC11
9	CP12	19	CP-PET23	29	CP11
10	CP21	20	CP-PET12	30	CC21

Tabla 6.3 Orden de prueba de carga

- Una vez establecido el orden para la prueba de carga, se siguió el proceso descrito a continuación, para cada probeta:

Se colocó cada probeta en la máquina universal de carga y se le aplicó esfuerzo de compresión axial creciente, hasta que fallara.

Se registraron los esfuerzos para incrementos de deformación específica de 0.1% y la deformación específica y el esfuerzo correspondiente, en el momento de la falla.

En la tabla mostrada a continuación, se muestran los resultados de este experimento:

E:MPa D:mm/mm	CC1		CC2		CP1		CP2		CP-PET1		CP-PET2	
	E	D	E	D	E	D	E	D	E	D	E	D
1	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000
1	12.02	0.0010	12.00	0.0010	17.93	0.0010	21.18	0.0010	22.48	0.0010	21.79	0.0010
1	20.37	0.0020	20.49	0.0020	34.47	0.0020	41.88	0.0020	45.88	0.0020	46.21	0.0020
1	22.15	0.0030	23.26	0.0030	46.88	0.0030	45.94	0.0030	62.05	0.0030	64.63	0.0030
1	24.60	0.0035	23.79	0.0034	54.12	0.0040	57.15	0.0040	68.93	0.0040	68.78	0.0040
1	0.00	0.0035	0.00	0.0034	56.88	0.0050	57.21	0.0050	68.95	0.0050	69.26	0.0050
1	0.00	0.0035	0.00	0.0034	61.71	0.0060	57.56	0.0060	69.15	0.0059	71.83	0.0061
1	0.00	0.0035	0.00	0.0034	62.40	0.0070	60.53	0.0070	0.00	0.0059	0.00	0.0061
1	0.00	0.0035	0.00	0.0034	62.74	0.0080	61.95	0.0080	0.00	0.0059	0.00	0.0061
1	0.00	0.0035	0.00	0.0034	63.02	0.0089	67.09	0.0095	0.00	0.0059	0.00	0.0061
2	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000
2	11.89	0.0010	13.29	0.0010	16.22	0.0010	16.33	0.0010	20.73	0.0010	21.64	0.0010
2	21.20	0.0020	20.63	0.0020	45.78	0.0020	40.18	0.0020	41.97	0.0020	48.74	0.0020

2	24.21	0.0030	21.27	0.0030	46.86	0.0030	48.57	0.0030	61.92	0.0030	62.00	0.0030
2	25.49	0.0036	25.85	0.0037	54.55	0.0040	58.38	0.0040	67.26	0.0040	64.31	0.0040
2	0.00	0.0036	0.00	0.0037	55.64	0.0050	58.67	0.0050	71.13	0.0050	67.21	0.0050
2	0.00	0.0036	0.00	0.0037	61.78	0.0060	59.10	0.0060	73.04	0.0062	67.73	0.0053
2	0.00	0.0036	0.00	0.0037	61.93	0.0070	59.89	0.0070	0.00	0.0062	0.00	0.0053
2	0.00	0.0036	0.00	0.0037	61.97	0.0080	63.40	0.0080	0.00	0.0062	0.00	0.0053
2	0.00	0.0036	0.00	0.0037	66.15	0.0087	64.55	0.0089	0.00	0.0062	0.00	0.0053
3	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000
3	10.30	0.0010	10.34	0.0010	17.64	0.0010	16.81	0.0010	21.32	0.0010	21.60	0.0010
3	20.95	0.0020	19.89	0.0020	42.89	0.0020	46.24	0.0020	46.58	0.0020	48.65	0.0020
3	23.14	0.0030	19.96	0.0030	46.29	0.0030	49.97	0.0030	60.87	0.0030	58.68	0.0030
3	24.94	0.0035	22.04	0.0031	47.84	0.0040	52.00	0.0040	69.41	0.0040	65.93	0.0040
3	0.00	0.0035	0.00	0.0031	57.78	0.0050	56.51	0.0050	69.92	0.0050	70.91	0.0050
3	0.00	0.0035	0.00	0.0031	59.84	0.0060	60.92	0.0060	73.63	0.0062	73.44	0.0061
3	0.00	0.0035	0.00	0.0031	60.43	0.0070	61.23	0.0070	0.00	0.0062	0.00	0.0061
3	0.00	0.0035	0.00	0.0031	61.01	0.0080	61.54	0.0080	0.00	0.0062	0.00	0.0061
3	0.00	0.0035	0.00	0.0031	62.17	0.0086	62.56	0.0087	0.00	0.0062	0.00	0.0061
4	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000
4	11.48	0.0010	13.38	0.0010	16.12	0.0010	14.87	0.0010	17.74	0.0010	25.87	0.0010
4	19.54	0.0020	21.10	0.0020	42.99	0.0020	43.20	0.0020	43.94	0.0020	45.44	0.0020
4	22.01	0.0030	22.16	0.0030	48.40	0.0030	45.78	0.0030	60.79	0.0030	63.97	0.0030
4	23.79	0.0034	23.76	0.0034	57.08	0.0040	55.21	0.0040	65.35	0.0040	67.02	0.0040
4	0.00	0.0034	0.00	0.0034	57.59	0.0050	59.00	0.0050	70.09	0.0050	70.24	0.0050
4	0.00	0.0034	0.00	0.0034	58.93	0.0060	59.43	0.0060	73.99	0.0063	70.52	0.0060
4	0.00	0.0034	0.00	0.0034	62.34	0.0070	60.00	0.0070	0.00	0.0063	0.00	0.0060
4	0.00	0.0034	0.00	0.0034	62.40	0.0080	61.67	0.0080	0.00	0.0063	0.00	0.0060
4	0.00	0.0034	0.00	0.0034	64.63	0.0083	66.58	0.0084	0.00	0.0063	0.00	0.0060
5	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000	0.00	0.0000
5	11.63	0.0010	11.87	0.0010	15.62	0.0010	16.01	0.0010	21.73	0.0010	25.94	0.0010
5	17.68	0.0020	18.30	0.0020	46.65	0.0020	45.33	0.0020	48.81	0.0020	48.83	0.0020
5	22.81	0.0030	22.77	0.0030	51.09	0.0030	46.17	0.0030	65.70	0.0030	64.48	0.0030
5	24.94	0.0035	26.79	0.0038	51.31	0.0040	55.75	0.0040	66.79	0.0040	67.38	0.0040
5	0.00	0.0035	0.00	0.0038	57.16	0.0050	55.97	0.0050	67.12	0.0050	68.41	0.0050
5	0.00	0.0035	0.00	0.0038	60.57	0.0060	60.19	0.0060	71.71	0.0061	69.24	0.0059
5	0.00	0.0035	0.00	0.0038	62.43	0.0070	60.32	0.0070	0.00	0.0061	0.00	0.0059
5	0.00	0.0035	0.00	0.0038	64.00	0.0080	64.12	0.0080	0.00	0.0061	0.00	0.0059
5	0.00	0.0035	0.00	0.0038	66.85	0.0090	64.77	0.0092	0.00	0.0061	0.00	0.0059

Tabla 6.4 Datos de esfuerzo y deformación obtenidos en la prueba de carga.

Notas aclaratorias respecto a la Tabla 6.4: 1MPa (un Mega Pascal) es una unidad de esfuerzo, en este caso, normal de compresión; y 1 mm / mm (un milímetro / milímetro) es la deformación específica, que se obtiene midiendo la contracción de la probeta entre su altura original).

Recordemos la **definición de tenacidad** dada en la introducción de este trabajo: “La tenacidad es la energía de deformación que es capaz de absorber una unidad de volumen de cierto material hasta que falla”.

La tenacidad se puede calcular como el **área bajo la curva Esfuerzo (E) – Deformación (D)**. Las unidades de la tenacidad, por definición, son MJ / m^3 (Mega Joules / metro³), que equivalen a $\text{MPa} \cdot \text{mm} / \text{mm}$ (área bajo la curva esfuerzo – deformación) = $\text{MPa} \cdot \text{m} / \text{m} = (\text{MN} / \text{m}^2) (\text{m} / \text{m}) = \text{MN} \cdot \text{m} / \text{m}^3$ (aquí MN es un Mega Newton) = MJ / m^3 .

Las siguientes gráficas muestran los datos:

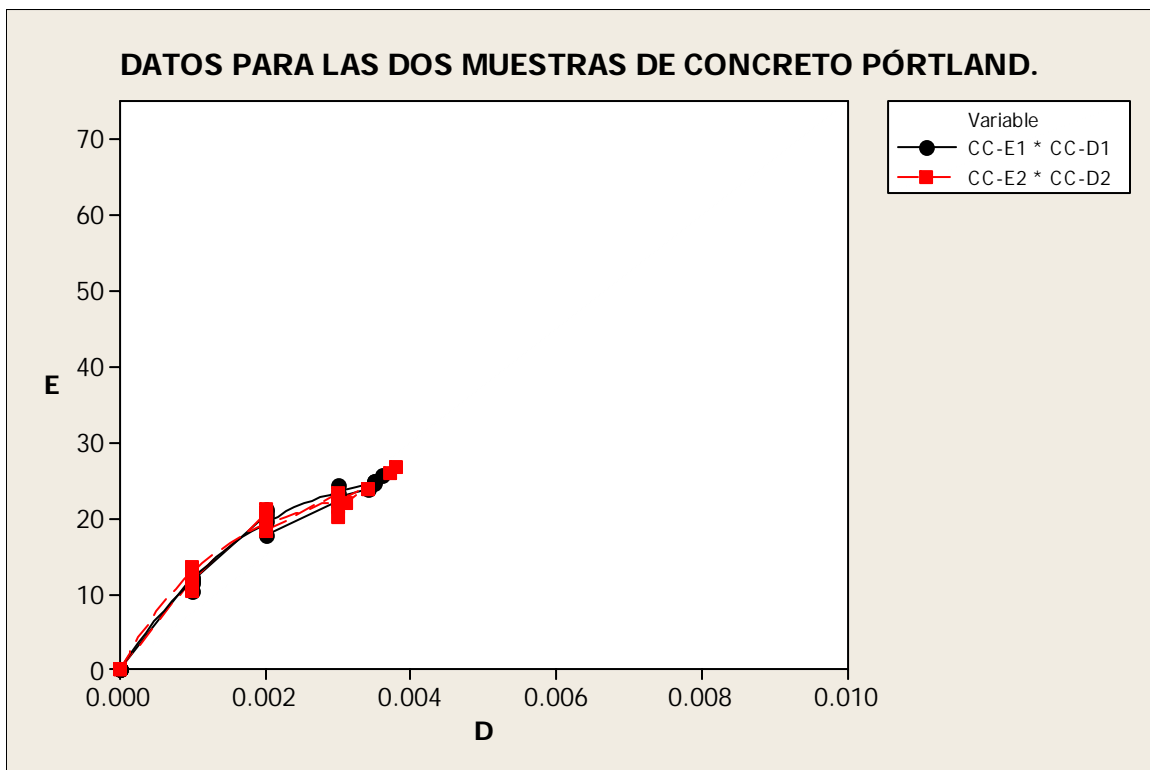


Figura 6.1

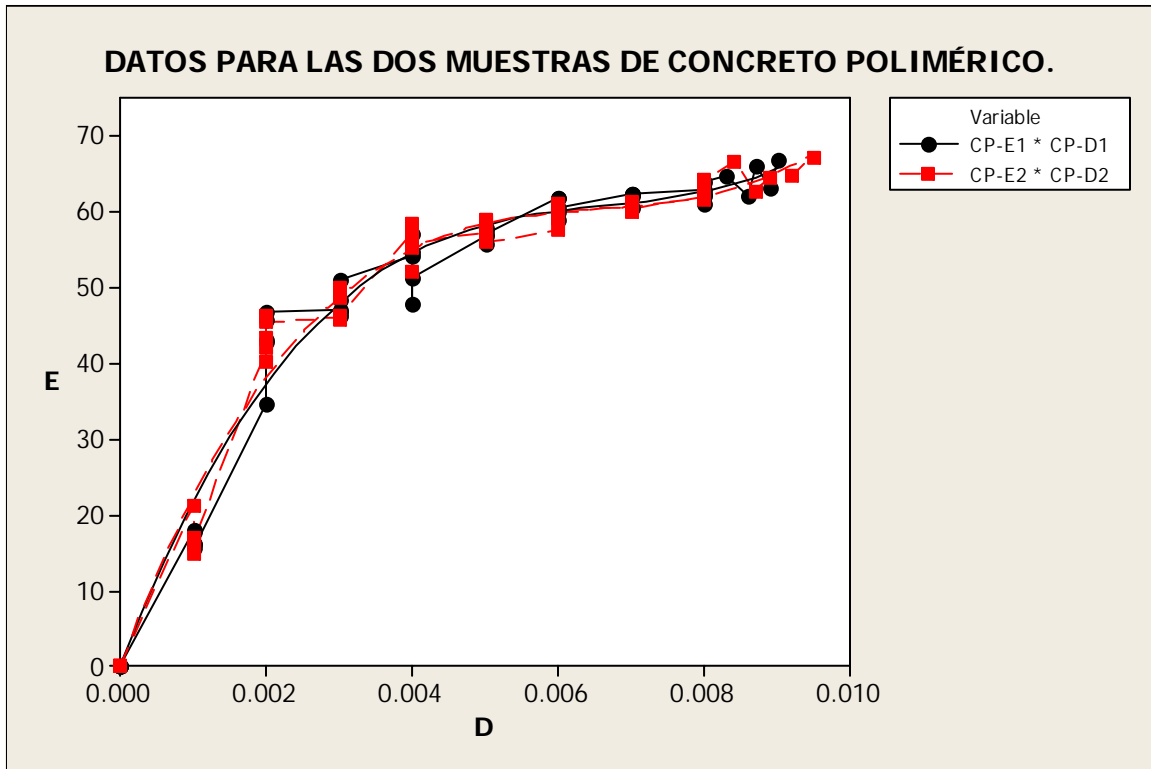


Figura 6.2

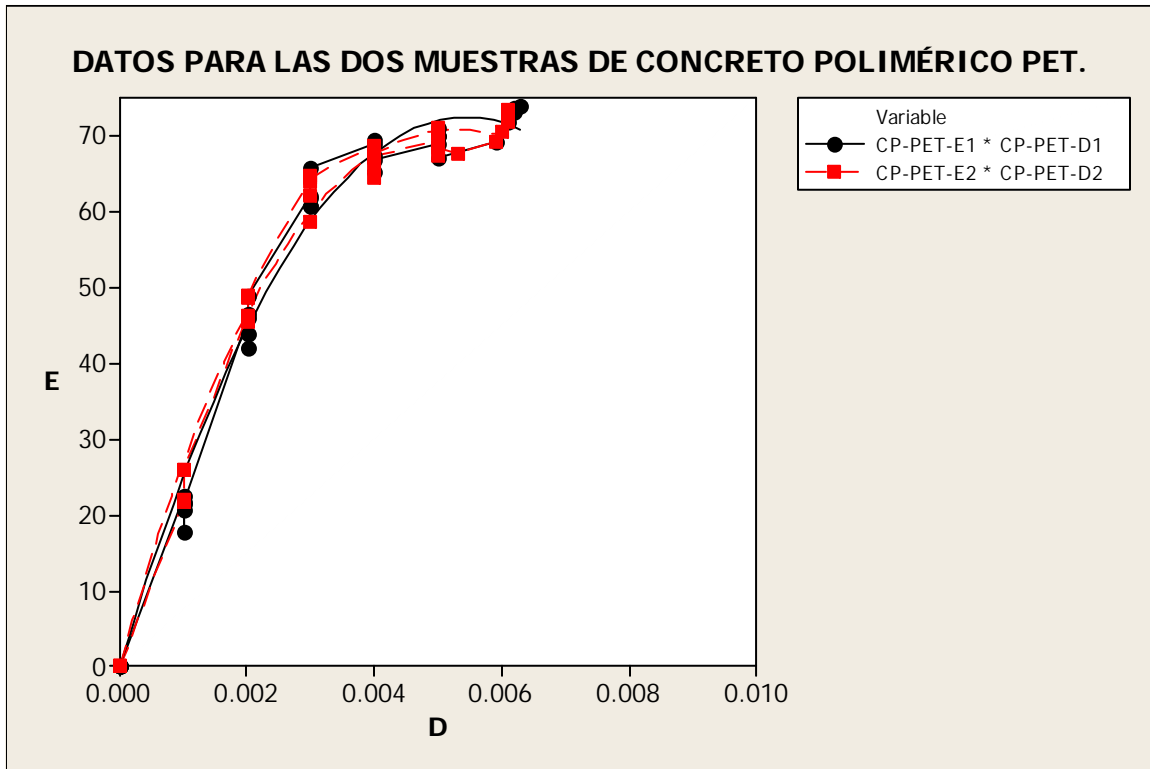


Figura 6.3

ANÁLISIS DE REGRESIÓN PARA LOS DATOS.

ELECCIÓN DEL MODELO.

Nuestro diseño del experimento involucra esencialmente dos problemas de análisis:

1. Los predictores son variables no aleatorias, porque las deformaciones específicas fueron elegidas desde cero, incrementándolas de 0.10% en 0.10%, excepto la última deformación específica (en la que se presenta la falla) que en realidad es una variable aleatoria. Estrictamente, el análisis debería ser híbrido, para considerar regresores no aleatorios con el regresor aleatorio. Sin embargo, por comodidad, se optó por analizar bajo la premisa de que todos los predictores son variables no aleatorias.
2. El modelo de regresión debe pasar por el origen, ya que si no se contrae la probeta, no experimenta esfuerzo de compresión alguno. Este hecho, impide la interpretación clásica de la variación total, como la suma de la variación no explicada por el modelo más la variación explicada por él ($VT \neq VNE + VE$)².

Originalmente, se pensó en un modelo no lineal con dos o tres parámetros, que satisficiera las hipótesis anteriores, pero al tratar de evaluar los parámetros de los modelos propuestos, se encontraron fuertes problemas de convergencia.

Uno de los modelos no lineales que se probó fue:

$$E = \theta_1(1 - e^{-\theta_2 D}).$$

El modelo lineal de tipo polinomial de tercer grado con tres parámetros, resultó ser el más adecuado para nuestros fines. Este modelo es globalmente significativo en todos los casos. Los tres parámetros en CC2, CP1, CP2 y CP-PET2 son significativos y, como se verá más adelante, en CC1 y en CP-PET1, sólo dos de los tres parámetros resultan altamente significativos, sin embargo, se dejó el parámetro de baja significancia porque el modelo genera una curva bien ajustada a los datos, lo que es de suma importancia en este caso, ya

que el análisis se centra en la tenacidad: área bajo la curva esfuerzo – deformación, que se obtiene integrando la función ajustada.

Enseguida se muestra un análisis de regresión lineal, sin parámetro constante, de la forma:

$$E_i = \sum_{j=1}^3 \beta_j D_{ij} + \varepsilon_i$$

en el que $D_{i1} = D_i$, $D_{i2} = D_i^2$ y $D_{i3} = D_i^3$.

En este modelo, E es el esfuerzo en MPa y D es la deformación específica en mm / mm.

DETALLES DEL MODELO ELEGIDO.

La forma matricial del modelo es:

$$\underline{\mathbf{E}} = \mathbf{D} \underline{\boldsymbol{\beta}} + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Donde: $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{11}^2 & d_{11}^3 \\ d_{21} & d_{21}^2 & d_{21}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{i1} & d_{i1}^2 & d_{i1}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m1}^2 & d_{m1}^3 \end{pmatrix}$; $\underline{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$; $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix}$ y $\underline{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_m \end{pmatrix}$.

Aplicando el método de los mínimos cuadrados a este modelo, tenemos:

$$\hat{\underline{\boldsymbol{\beta}}} = (\mathbf{D}' \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}' \underline{\mathbf{E}}$$

(Véase la última ecuación de la página 102 de este texto).

ANÁLISIS DE VARIANZA PARA ESTOS MODELOS DE REGRESIÓN.

Supuestos básicos:

$$E_i = \sum_{j=1}^3 \beta_j D_{ij} + \varepsilon_i \quad \varepsilon : N(0, \sigma^2) \quad COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, i \neq j \quad COV(\varepsilon_i, d_i) = 0$$

$$VT = \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^m (Y_i - \hat{Y}_i + \hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^m (Y_i - \hat{Y}_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^m (Y_i - \hat{Y}_i)(\hat{Y}_i - \bar{Y}) + \sum_{i=1}^m (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$$

$$VT = VNE + 2 \sum_{i=1}^m (Y_i - \hat{Y}_i)(\hat{Y}_i - \bar{Y}) + VE$$

$$VT = VNE + 2 \sum_{i=1}^m (Y_i - \hat{\beta}_1 d_i - \hat{\beta}_2 d_i^2 - \hat{\beta}_3 d_i^3) (\hat{\beta}_1 d_i + \hat{\beta}_2 d_i^2 + \hat{\beta}_3 d_i^3 - \bar{Y}) + VE$$

De tal manera que el coeficiente de determinación, definido como la relación entre la variación explicada con respecto a la variación total, quedaría:

$$r^2 = \frac{VE}{VT} = \frac{VT - VNE - TR}{VT}$$

Obsérvese que este coeficiente de determinación no está acotado en el intervalo $[0,1]$, y no sirve como medida del porcentaje de de la variación total que explica el modelo de regresión.

Dado lo anterior, en lugar de usar un coeficiente de determinación, se usará el coeficiente de correlación entre las variables y y \hat{y} ($-1 \leq r \leq 1$) elevado al cuadrado ($0 \leq r^2 \leq 1$):

$$r^2 = [\text{corr}(y, \hat{y})]^2 = \left[\frac{\text{cov}(y, \hat{y})}{\sigma_y \cdot \sigma_{\hat{y}}} \right]^2 = \frac{\left[\sum_{i=1}^m (y - \bar{y})(\hat{y} - \bar{\hat{y}}) \right]^2}{\sum_{i=1}^m (y - \bar{y})^2 \sum_{i=1}^m (\hat{y} - \bar{\hat{y}})^2}$$

Para nuestro problema particular, $y \leftrightarrow E$ $\hat{y} \leftrightarrow \hat{E}$, donde E representa el esfuerzo medido y \hat{E} , el esfuerzo estimado con el modelo:

$$\hat{E} = \hat{\beta}_1 D + \hat{\beta}_2 D^2 + \hat{\beta}_3 D^3$$

Así que el cuadrado del coeficiente de correlación queda:

$$r^2 = \left[\text{corr}(E, \hat{E}) \right]^2 = \left[\frac{\text{cov}(E, \hat{E})}{\sigma_E \cdot \sigma_{\hat{E}}} \right]^2 = \frac{\left[\sum_{i=1}^m (E_i - \bar{E})(\hat{E}_i - \bar{\hat{E}}) \right]^2}{\sum_{i=1}^m (E_i - \bar{E})^2 \sum_{i=1}^m (\hat{E}_i - \bar{\hat{E}})^2}$$

El estimador de la varianza, es:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{VNE}{m-n} = \frac{SS_{RES}}{m-n} = \frac{e'e}{m-n} = \frac{Y'Y - \beta'X'Y}{m-n} = \frac{E'E - \beta'D'E}{m-n}$$

(Véanse las ecuaciones de la página 105 de este texto).

A continuación se muestran los resultados del análisis descrito, hecho con MINITAB.

En estas salidas de computadora, aparecen los estimadores de los parámetros del modelo junto con sus valores “P”, que permiten medir el nivel de significancia de cada uno de ellos en el modelo.

Después, la desviación estándar de los esfuerzos.

Finalmente, se muestra la tabla del análisis de varianza, que incluye el desglose del error total en error puro y en error debido a la falta de ajuste (esto es posible gracias a la replicación).

Regression Analysis: CC-E1 versus CC-D1, CCD1cuad, CCD1cub

The regression equation is
 CC-E1 = 14399 CC-D1 - 2718309 CCD1cuad + 1.74E+08 CCD1cub

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Noconstant				
CC-D1	14399	1015	14.19	0.000
CCD1cuad	-2718309	836503	-3.25	0.004
CCD1cub	173544405	163417227	1.06	0.300

S = 0.920400

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	3	8319.8	2773.3	3273.71	0.000
Residual Error	22	18.6	0.8		
Lack of Fit	4	5.5	1.4	1.88	0.157
Pure Error	18	13.1	0.7		
Total	25	8338.5			

2 rows with no replicates

Source	DF	Seq SS
CC-D1	1	8130.4
CCD1cuad	1	188.5
CCD1cub	1	1.0

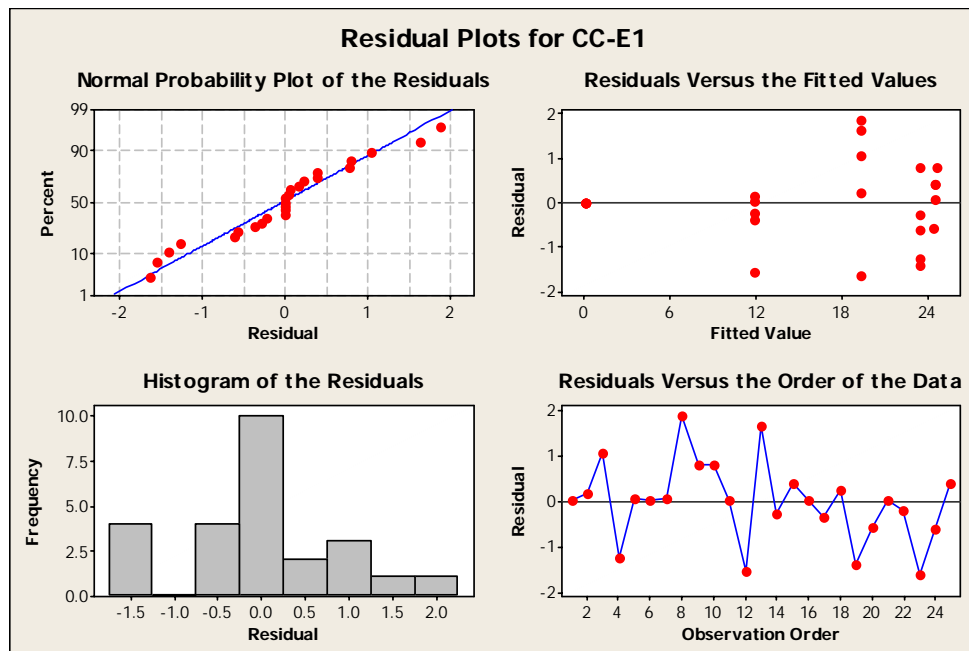


Figura 6.4

Para el esfuerzo CC-E1, se observa que no se puede rechazar la hipótesis $\beta_3 = 0$ ($P = 0.300$), que el modelo es globalmente significativo ($P = 0.000$). Que la desviación estándar del esfuerzo es 0.920400 MPa y que la hipótesis de bondad de ajuste no puede ser rechazada ($P = 0.157$). No parece haber un problema grave de normalidad y los residuales muestran cierta tendencia a amplificar su variación con respecto a los valores ajustados, probablemente debido a que la deformación nula implica esfuerzo nulo.

Regression Analysis: CC-E2 versus CC-D2, CCD2cuad, CCD2cub

The regression equation is

$$\text{CC-E2} = 17456 \text{ CC-D2} - 5254521 \text{ CCD2cuad} + 6.45\text{E}+08 \text{ CCD2cub}$$

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Noconstant				
CC-D2	17456	1146	15.23	0.000
CCD2cuad	-5254521	899361	-5.84	0.000
CCD2cub	644682655	170169790	3.79	0.001

S = 1.14760

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	3	8143.2	2714.4	2061.08	0.000
Residual Error	22	29.0	1.3		
Lack of Fit	5	11.2	2.2	2.15	0.108
Pure Error	17	17.7	1.0		
Total	25	8172.2			

3 rows with no replicates

Source	DF	Seq SS
CC-D2	1	7910.0
CCD2cuad	1	214.3
CCD2cub	1	18.9

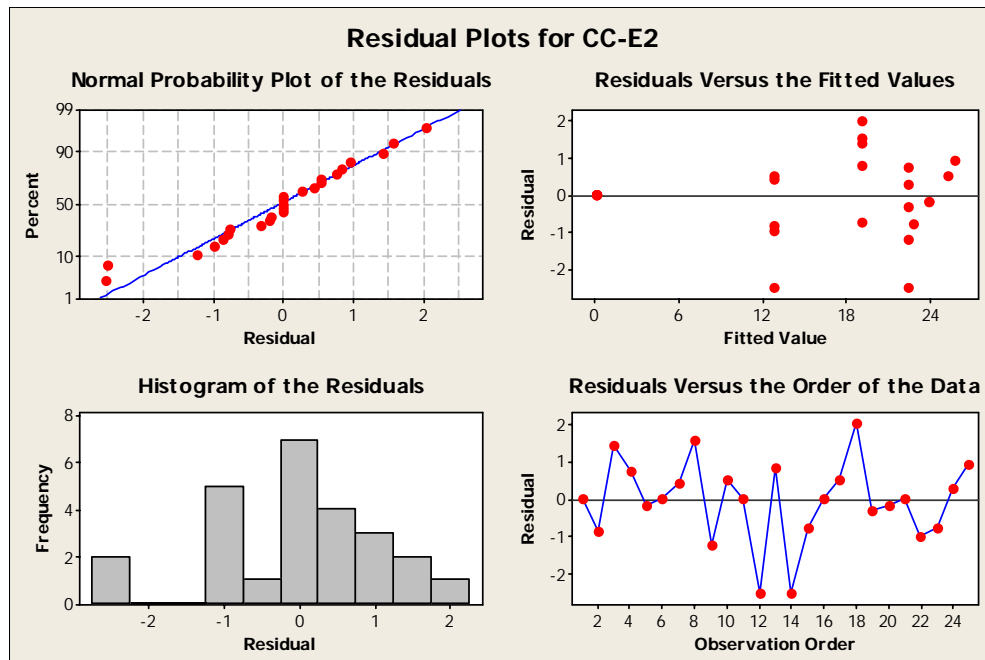


Figura 6.5

Fernando Pérez Godínez

Para el esfuerzo CC-E2, se observa que los tres parámetros del modelo de regresión son altamente significativos, que la significancia global del modelo es buena ($P = 0.000$). Que la desviación estándar del esfuerzo es 1.14760 MPa y que la hipótesis de bondad de ajuste no puede ser rechazada ($P = 0.108$). No parece haber un problema grave de normalidad y los residuales muestran cierta tendencia a amplificar su variación con respecto a los valores ajustados, probablemente debido a que la deformación nula implica esfuerzo nulo.

Regression Analysis: CP-E1 versus CP-D1, CPD1cuad, CPD1cub

The regression equation is
 CP-E1 = 25204 CP-D1 - 3623877 CPD1cuad + 1.82E+08 CPD1cub

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Noconstant				
CP-D1	25204.2	892.7	28.23	0.000
CPD1cuad	-3623877	301803	-12.01	0.000
CPD1cub	181588693	24304282	7.47	0.000

S = 3.18821

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	3	129755	43252	4255.09	0.000
Residual Error	47	478	10		
Lack of Fit	11	299	27	5.49	0.000
Pure Error	36	178	5		
Total	50	130233			

5 rows with no replicates

Source	DF	Seq SS
CP-D1	1	120864
CPD1cuad	1	8324
CPD1cub	1	567

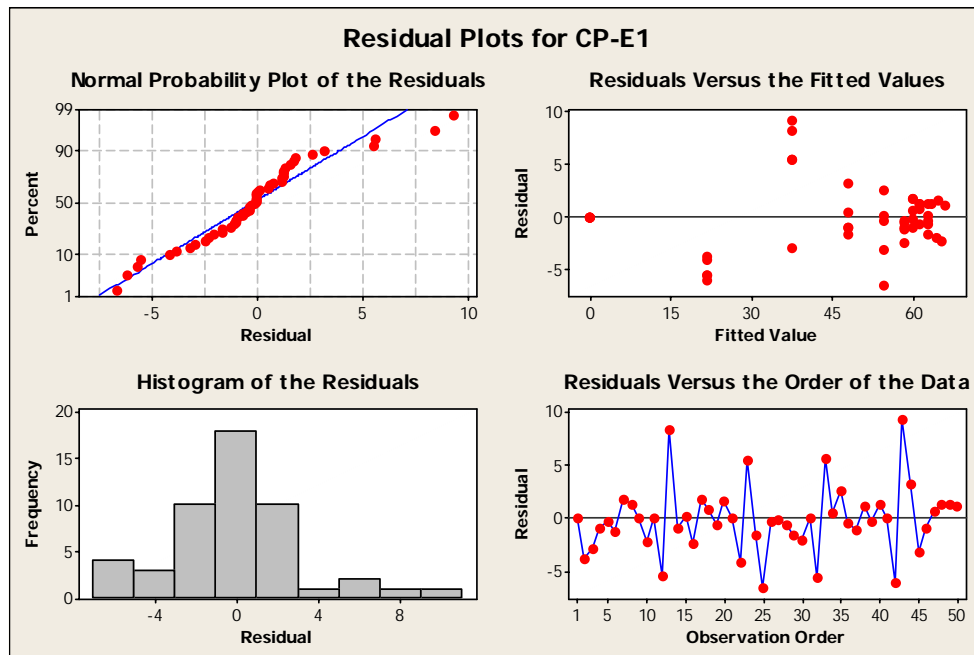


Figura 6.6

Para el esfuerzo CP-E1, se observa que los tres parámetros del modelo de regresión son altamente significativos, que el modelo es globalmente significativo ($P = 0.000$). Que la desviación estándar del esfuerzo es 3.18821 MPa y que la hipótesis de bondad de ajuste se rechaza ($P = 0.000$). No parece haber un problema grave de normalidad y los residuales muestran cierta tendencia a reducir su variación con respecto a los valores ajustados, cerca de la deformación de ruptura.

Regression Analysis: CP-E2 versus CP-D2, CPD2cuad, CPD2cub

The regression equation is
 CP-E2 = 25994 CP-D2 - 3842578 CPD2cuad + 1.95E+08 CPD2cub

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Noconstant				
CP-D2	25994.2	783.3	33.19	0.000
CPD2cuad	-3842578	255507	-15.04	0.000
CPD2cub	195285547	19944936	9.79	0.000

S = 2.97209

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	3	130417	43472	4921.42	0.000
Residual Error	47	415	9		
Lack of Fit	11	310	28	9.64	0.000

Pure Error	36	105	3
Total	50	130833	

5 rows with no replicates

Source	DF	Seq SS
CP-D2	1	120612
CPD2cuad	1	8958
CPD2cub	1	847

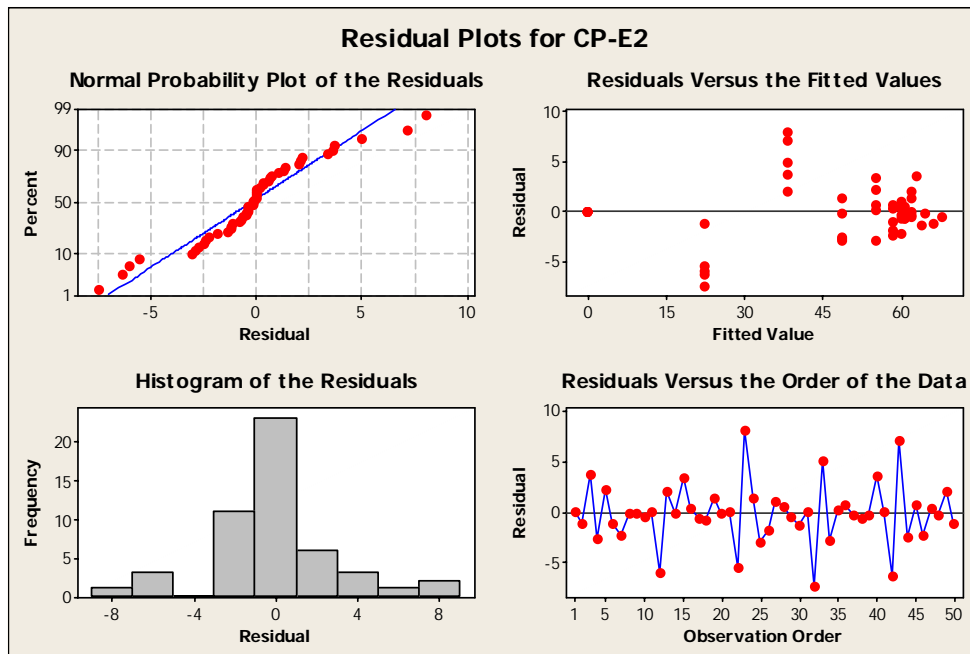


Figura 6.7

Para el esfuerzo CP-E2, se observa que los tres parámetros del modelo de regresión son altamente significativos, que el modelo es globalmente significativo ($P = 0.000$). Que la desviación estándar del esfuerzo es 2.97209 MPa y que la hipótesis de bondad de ajuste se rechaza ($P = 0.000$). No parece haber un problema grave de normalidad y los residuales muestran cierta tendencia a reducir su variación con respecto a los valores ajustados, cerca de la deformación de ruptura.

Regression Analysis: CP-PET-E1 versus CP-PET-D1, CPPETD1cuad, CPPETD1cub

The regression equation is
 CP-PET-E1 = 28001 CP-PET-D1 - 2949234 CPPETD1cuad + 46193551 CPPETD1cub

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Noconstant				
CP-PET-D1	28001	1429	19.59	0.000
CPPETD1cuad	-2949234	677179	-4.36	0.000

CPPETDlcub 46193551 76230604 0.61 0.549

S = 3.04611

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	3	104730	34910	3762.33	0.000
Residual Error	32	297	9		
Lack of Fit	7	220	31	10.25	0.000
Pure Error	25	77	3		
Total	35	105027			

3 rows with no replicates

Source	DF	Seq SS
CP-PET-D1	1	99751
CPPETDlcuad	1	4975
CPPETDlcub	1	3

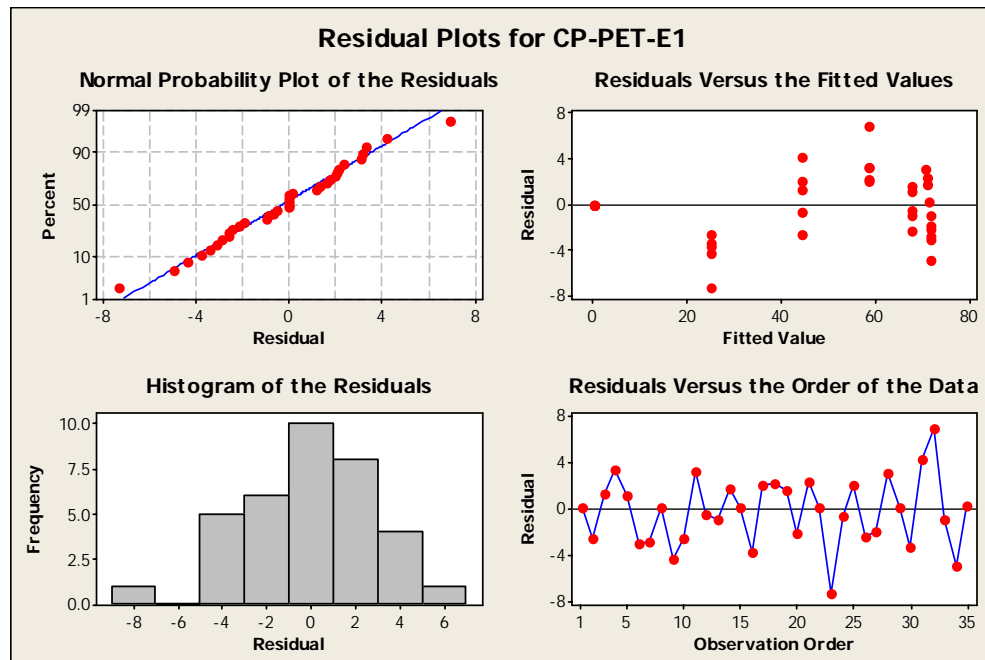


Figura 6.8

Para el esfuerzo CP-PET-E1, se observa que no se puede rechazar la hipótesis $\beta_3 = 0$ ($P = 0.549$), que el modelo es globalmente significativo ($P = 0.000$).

Que la desviación estándar del esfuerzo es 3.04611 MPa y que la hipótesis de bondad de ajuste se rechaza ($P = 0.000$). No parece haber un problema grave de normalidad y los residuales muestran cierta periodicidad.

Regression Analysis: CP-PET-E2 versus CP-PET-D2, CPPETD2cuad, CPPETD2cub

The regression equation is

$$\text{CP-PET-E2} = 30944 \text{ CP-PET-D2} - 4130527 \text{ CPPETD2cuad} + 1.53\text{E}+08 \text{ CPPETD2cub}$$

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Noconstant				
CP-PET-D2	30944	1302	23.77	0.000
CPPETD2cuad	-4130527	633809	-6.52	0.000
CPPETD2cub	153202747	73708756	2.08	0.046

S = 2.68606

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	3	104671	34890	4835.85	0.000
Residual Error	32	231	7		
Lack of Fit	7	153	22	6.97	0.000
Pure Error	25	78	3		
Total	35	104901			

3 rows with no replicates

Source	DF	Seq SS
CP-PET-D2	1	99367
CPPETD2cuad	1	5272
CPPETD2cub	1	31

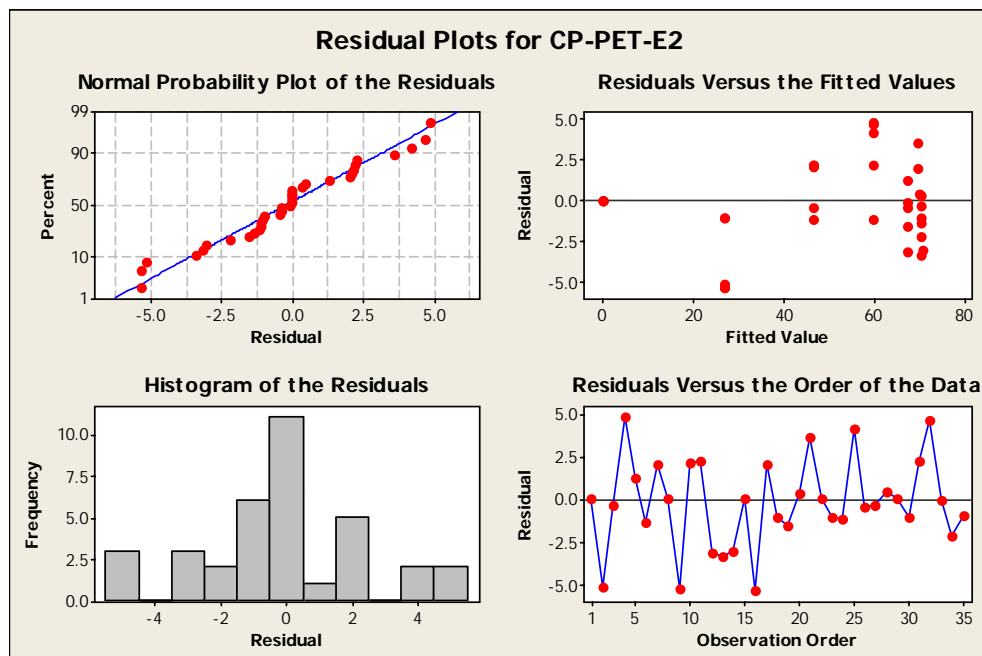


Figura 6.9

Para el esfuerzo CP-PET-E2, se observa que se puede rechazar la hipótesis $\beta_3 = 0$ ($P = 0.046$), que el modelo es globalmente significativo ($P = 0.000$).

Que la desviación estándar del esfuerzo es 2.68606 MPa y que la hipótesis de bondad de ajuste se rechaza ($P = 0.000$). No parece haber un problema grave de normalidad y los residuales muestran cierta periodicidad.

La siguiente gráfica, elaborada con MINITAB, muestra todos los datos y las seis cúbicas que han sido obtenidas con regresión sin ordenada al origen, para cada tipo y muestra de concreto.

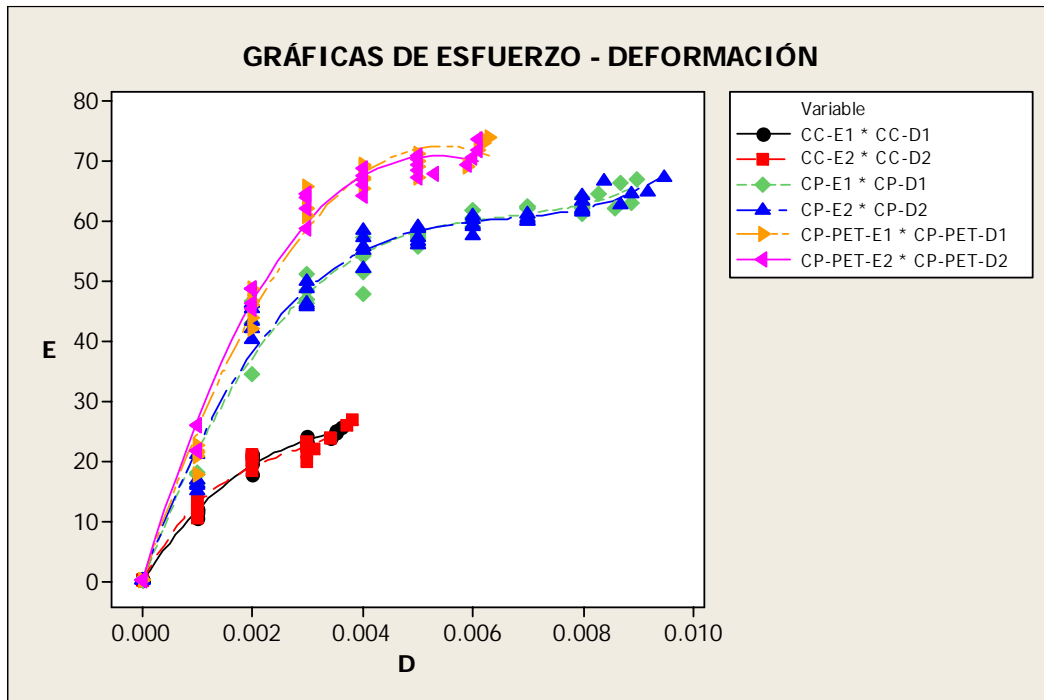


Figura 6.10

ANÁLISIS DE ADECUACIÓN DEL MODELO.

Primero se debe hacer la siguiente prueba de hipótesis, para determinar si el modelo cúbico resulta significativo en cada caso:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

$$H_1 : \beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3 \neq 0 \text{ al menos para una } j.$$

El estadístico de prueba es:

$$F_0 = \frac{VE/n}{VNE/(m-n)} = \frac{\sum_{i=1}^m (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 / n}{\sum_{i=1}^m (Y_i - \hat{Y}_i)^2 / (m-n)} = \frac{SS_{REGR}/n}{SS_{RES}/(m-n)}$$

donde m es el número de observaciones y n es el número de variables regresoras para un modelo sin ordenada al origen.

Los valores del estadístico “F”, muestran que el modelo cúbico elegido en este caso es altamente significativo para CC1, CC2, CP1, CP2, CP-PET1 y CP-PET2:

MATERIAL	F	P
CC1	3273.71	0.000
CC2	2061.08	0.000
CP1	4255.09	0.000
CP2	4921.42	0.000
CP-PET1	3762.33	0.000
CP-PET2	4835.85	0.000

Tabla 6.5 Prueba de significancia del modelo

Ahora se hará la siguiente prueba de hipótesis para evaluar la significancia de cada parámetro:

$$H_0 : \beta_j = 0$$

$$H_1 : \beta_j \neq 0$$

El estadístico de prueba es:

$$T_0 = \frac{\hat{\beta}_j - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} = \frac{\hat{\beta}_j - 0}{\sqrt{C_{jj}} \frac{SS_{RES}}{m-n}}$$

Los valores del estadístico “T”, muestran que el modelo cúbico elegido es altamente significativo para CC2, CP1, CP2 y CP-PET2, no así para CC1 ni CP-PET1. Sin embargo, se conservan los parámetros con baja significancia, porque el modelo cúbico se ajusta muy bien a los datos (hecho importante si se toma en cuenta que la Tenacidad se calcula como el área bajo la curva Esfuerzo – Deformación).

MATERIAL	PARÁMETRO	T	P
CC1	$\hat{\beta}_1$	14.19	0.000
	$\hat{\beta}_2$	-3.25	0.004
	$\hat{\beta}_3$	1.06	0.300

CC2	$\hat{\beta}_1$	15.23	0.000
	$\hat{\beta}_2$	-5.84	0.000
	$\hat{\beta}_3$	3.79	0.001
CP1	$\hat{\beta}_1$	28.23	0.000
	$\hat{\beta}_2$	-12.01	0.000
	$\hat{\beta}_3$	7.47	0.000
CP2	$\hat{\beta}_1$	33.19	0.000
	$\hat{\beta}_2$	-15.04	0.000
	$\hat{\beta}_3$	9.79	0.000
CP-PET1	$\hat{\beta}_1$	19.59	0.000
	$\hat{\beta}_2$	-4.36	0.000
	$\hat{\beta}_3$	0.61	0.549
CP-PET2	$\hat{\beta}_1$	23.77	0.000
	$\hat{\beta}_2$	-6.52	0.000
	$\hat{\beta}_3$	2.08	0.046

Tabla 6.6 Prueba de significancia de los parámetros

Ahora se hará una prueba de falta de ajuste, con el fin de comparar la proporción del error debido a falta de ajuste, con respecto al error puro. Una falta de ajuste indica que la mayor parte del error total se debe a falta de ajuste y que sólo una parte menor de tal error está ocupada por el error puro.

La prueba se basa en la división de la suma de cuadrados del error, en dos componentes: la suma de cuadrados debida al error puro y la suma de cuadrados debido a la falta de ajuste².

$$VNE = SCE = SCEP + SCFA$$

$$SCE = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \hat{Y}_i)^2$$

$$SCEP = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2$$

$$SCFA = \sum_{i=1}^m n_i (\bar{Y}_i - \hat{Y}_i)^2$$

La prueba de hipótesis es:

$$H_0 : \mu_{Y(x)} = \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 \text{ (La verdadera función de regresión es lineal).}$$

$$H_1 : \mu_{Y(x)} \neq \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 \text{ (La verdadera función de regresión es no lineal).}$$

Con el estadístico:

$$F_0 = \frac{SC_{FA} / m - \sum_{k=1}^{nivrepl} (r_k - 1) - n}{SC_{EP} / \sum_{k=1}^{nivrepl} (r_k - 1)}$$

donde m es el número total de observaciones, r_k es el número de réplicas para el nivel k -ésimo, $nivrepl$ es el número de niveles replicados y n es el número de parámetros del modelo de regresión sin ordenada al origen.

La prueba de falta de ajuste para CC1 y CC2 no permite rechazar la hipótesis de un buen ajuste. Para CP1, CP2, CP-PET1 y CP-PET2 se rechaza la hipótesis de un buen ajuste.

MATERIAL	F	P
CC1	1.88	0.157
CC2	2.15	0.108
CP1	5.49	0.000
CP2	9.64	0.000
CP-PET1	10.25	0.000
CP-PET2	6.97	0.000

Tabla 6.7 Prueba de falta de ajuste

Una falta de ajuste imposibilita al modelo para efectuar predicciones, pero esto no afecta los propósitos de este trabajo, porque sólo se harán evaluaciones en el rango de las observaciones.

Enseguida se presenta una tabla que resume el coeficiente de determinación para cada material, definido como el cuadrado de la correlación:

$$r^2 = \left[\text{corr}(E, \hat{E}) \right]^2 = \left[\frac{\text{cov}(E, \hat{E})}{\sigma_E \cdot \sigma_{\hat{E}}} \right]^2 = \frac{\left[\sum_{i=1}^m (E_i - \bar{E})(\hat{E}_i - \bar{\hat{E}}) \right]^2}{\sum_{i=1}^m (E_i - \bar{E})^2 \sum_{i=1}^m (\hat{E}_i - \bar{\hat{E}})^2}$$

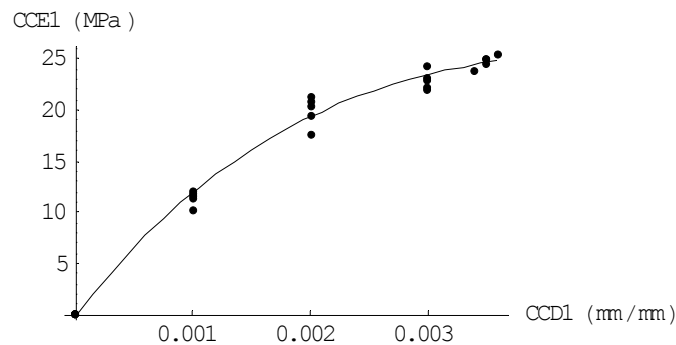
MATERIAL	r^2
CC1	0.99111
CC2	0.98554
CP1	0.97795
CP2	0.98081
CP-PET1	0.98784
CP-PET2	0.98996

Tabla 6.8 Coeficientes de determinación

Se puede ver que los ajustes son bastante buenos para el intervalo de deformaciones manejado.

EVALUACIÓN DE LAS TENACIDADES.

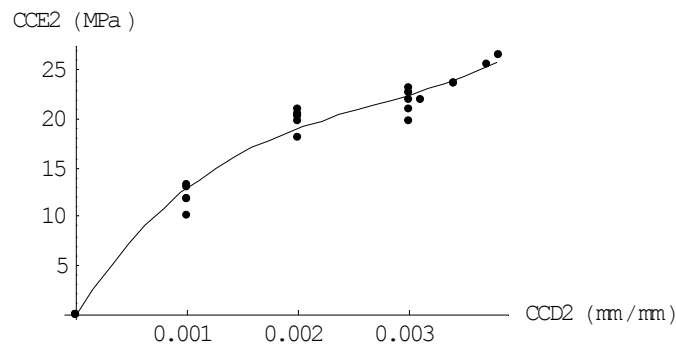
Para CC1:



$$Tl_{CC} = \int_0^{0.0036} (14399 D - 2718309 D^2 + 173544405 D^3) dD$$

$$T1cc = 0.0583176MPa \cdot \frac{mm}{mm} = 0.0583176 \frac{MJoules}{m^3}$$

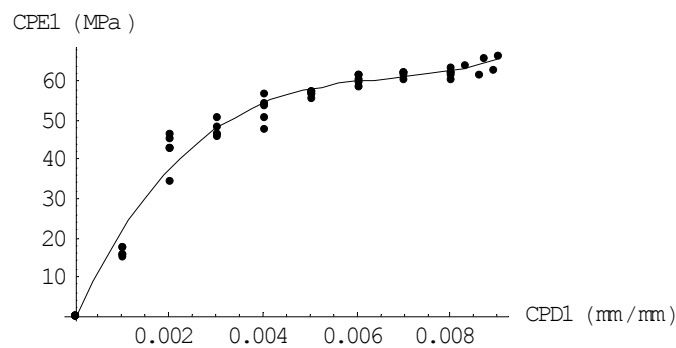
Para CC2:



$$T2cc = \int_0^{0.0038} (17456 D - 5254521 D^2 + 644682655 D^3) dD$$

$$T2cc = 0.0635299MPa \cdot \frac{mm}{mm} = 0.0635299 \frac{MJoules}{m^3}$$

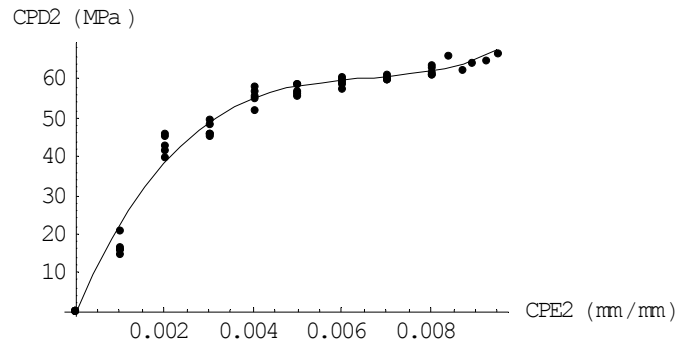
Para CP1:



$$T1cp = \int_0^{0.0090} (25204.2 D - 3623877 D^2 + 181588693 D^3) dD$$

$$T1cp = 0.4380188MPa \cdot \frac{mm}{mm} = 0.4380188 \frac{MJoules}{m^3}$$

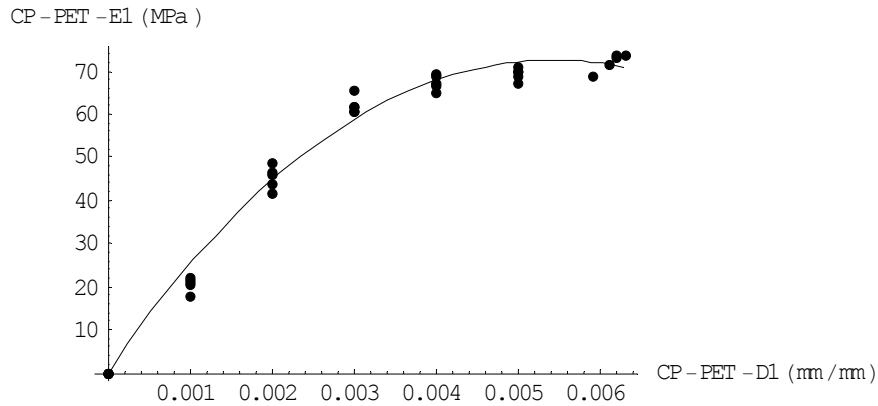
Para CP2:



$$T2_{cp} = \int_0^{0.0095} (25994.2 D - 3842578 D^2 + 195285547 D^3) dD$$

$$T2_{cp} = 0.4724648 MPa \cdot \frac{mm}{mm} = 0.4724648 \frac{MJoules}{m^3}$$

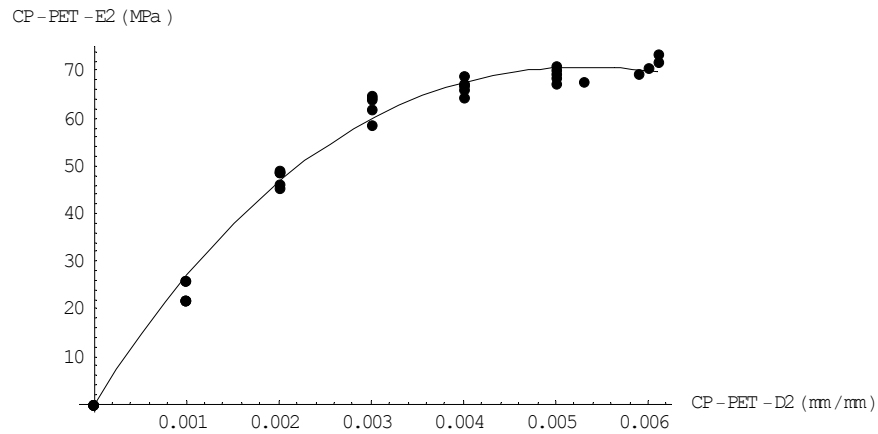
Para CPPET1:



$$T1_{cppet} = \int_0^{0.0063} (28001 D - 2949234 D^2 + 46193551 D^3) dD$$

$$T1_{cppet} = 0.3280563 MPa \cdot \frac{mm}{mm} = 0.3280563 \frac{MJoules}{m^3}$$

Para CPPET2:



$$T2_{cppet} = \int_0^{0.0061} (30944 D - 4130527 D^2 + 153202747 D^3) dD$$

$$T2_{cppet} = 0.3162266 \text{MPa} \cdot \frac{\text{mm}}{\text{mm}} = 0.3162266 \frac{\text{MJoules}}{\text{m}^3}$$

La siguiente tabla muestra un resumen del cálculo de las tenacidades:

MATERIAL	TENACIDAD (MJoules / m ³)	TENACIDAD (Joules / m ³)
CC1	0.0583176	58317.6
CC2	0.0635299	63529.9
CP1	0.4380188	438018.8
CP2	0.4724648	472464.8
CP-PET1	0.3280563	328056.3
CP-PET2	0.3162266	316226.6

Tabla 6.9 Tenacidades para los tres materiales

En esta tabla aparecen las desviaciones estándar y las varianzas para los esfuerzos (MPa):

MATERIAL	CC1	CC2	CP1	CP2	CPPET1	CPPET2
$\hat{\sigma}$	0.920400	1.14760	3.18821	2.97209	3.04611	2.68606
$\hat{\sigma}^2$	0.847136	1.316986	10.164683	8.833319	9.278786	7.214918

Tabla 6.10 Desviaciones estándar y varianzas estimadas para cada modelo

La siguiente tabla muestra las matrices de covarianzas $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$, calculadas con MATHEMATICA (ver la página 101 de este texto):

MATERIAL	Matriz de covarianzas
CC1	$\begin{pmatrix} 1.21528 \times 10^6 & -9.73081 \times 10^8 & 1.8154 \times 10^{11} \\ -9.73081 \times 10^8 & 8.26002 \times 10^{11} & -1.59602 \times 10^{14} \\ 1.8154 \times 10^{11} & -1.59602 \times 10^{14} & 3.15241 \times 10^{16} \end{pmatrix}$
CC2	$\begin{pmatrix} 997223. & -7.57906 \times 10^8 & 1.35732 \times 10^{11} \\ -7.57906 \times 10^8 & 6.1417 \times 10^{11} & -1.14613 \times 10^{14} \\ 1.35732 \times 10^{11} & -1.14613 \times 10^{14} & 2.1988 \times 10^{16} \end{pmatrix}$
CP1	$\begin{pmatrix} 78393.4 & -2.56755 \times 10^7 & 1.96119 \times 10^9 \\ -2.56755 \times 10^7 & 8.96089 \times 10^9 & -7.12096 \times 10^{11} \\ 1.96119 \times 10^9 & -7.12096 \times 10^{11} & 5.81126 \times 10^{13} \end{pmatrix}$
CP2	$\begin{pmatrix} 70504.1 & -2.23325 \times 10^7 & 1.65374 \times 10^9 \\ -2.23325 \times 10^7 & 7.54332 \times 10^9 & -5.8177 \times 10^{11} \\ 1.65374 \times 10^9 & -5.8177 \times 10^{11} & 4.61478 \times 10^{13} \end{pmatrix}$
CP-PET1	$\begin{pmatrix} 220207. & -1.01135 \times 10^8 & 1.08064 \times 10^{10} \\ -1.01135 \times 10^8 & 4.94214 \times 10^{10} & -5.48968 \times 10^{12} \\ 1.08064 \times 10^{10} & -5.48968 \times 10^{12} & 6.26278 \times 10^{14} \end{pmatrix}$
CP-PET2	$\begin{pmatrix} 234955. & -1.10785 \times 10^8 & 1.22039 \times 10^{10} \\ -1.10785 \times 10^8 & 5.56784 \times 10^{10} & -6.38609 \times 10^{12} \\ 1.22039 \times 10^{10} & -6.38609 \times 10^{12} & 7.53023 \times 10^{14} \end{pmatrix}$

Tabla 6.11 Matrices de covarianzas

INTERVALOS DE CONFIANZA PARA LOS MODELOS DE REGRESIÓN.

En esta sección se elaborarán intervalos de confianza del $(1 - 0.05)$ % para los tres parámetros de cada modelo de regresión. En la sección anterior, se ha calculado lo necesario para elaborar estos intervalos.

Los valores de $t_{\frac{\alpha}{2}, m-n}$ para los diferentes tamaños de muestra son:

T:0.025,22=	2.4055
T:0.025,47=	2.3155
T:0.025,32=	2.3518

El intervalo de confianza para el parámetro β_j al $(1 - \alpha)\%$, es:

$$\hat{\beta}_j - t_{\frac{\alpha}{2}, m-n} \sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}} \leq \beta_j \leq \hat{\beta}_j + t_{\frac{\alpha}{2}, m-n} \sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}}$$

Expresión en la que $t_{\frac{\alpha}{2}, m-n}$ es el valor de la “T” de Student con $m-n$ grados de libertad, para

una probabilidad $P(t) \leq \frac{\alpha}{2}$ ó $P(t) \geq \frac{\alpha}{2}$. β_j es el parámetro poblacional. $\hat{\beta}_j$ es el estimador del

parámetro j –ésimo del modelo y $\hat{\sigma}^2$ es la varianza estimada para el modelo de regresión.

C_{jj} es el elemento j –ésimo de la diagonal de la matriz de covarianzas, $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$.

Aquí se muestran los cálculos de los intervalos para cada parámetro:

$$\beta_{1CC1} = 14399 \pm 2.4055 \sqrt{0.847136 (1.21528 \times 10^6)}$$

$$11958.30 \leq \beta_{1CC1} \leq 16839.70$$

$$\beta_{2CC1} = -2718309 \pm 2.4055 \sqrt{0.847136 (8.26002 \times 10^{11})}$$

$$-4730488.39 \leq \beta_{2CC1} \leq -706129.61$$

$$\beta_{3CC1} = 173544405 \pm 2.4055 \sqrt{0.847136 (3.15241 \times 10^{16})}$$

$$-219550572.65 \leq \beta_{3CC1} \leq 566639382.65$$

$$\beta_{1CC2} = 17456 \pm 2.4055 \sqrt{1.316986 (997223)}$$

$$14699.32 \leq \beta_{1CC2} \leq 20212.68$$

$$\beta_{2CC2} = -5254521 \pm 2.4055 \sqrt{1.316986 (6.1417 \times 10^{11})}$$

$$-7417909.20 \leq \beta_{2CC2} \leq -3091132.80$$

$$\beta_{3CC2} = 644682655 \pm 2.4055 \sqrt{1.316986 (2.1988 \times 10^{16})}$$

$$235343752.15 \leq \beta_{3CC2} \leq 1054021557.85$$

$$\beta_{1CP1} = 25204.2 \pm 2.3155 \sqrt{10.164683 (78393.4)}$$

$$23137.25 \leq \beta_{1CP1} \leq 27271.15$$

$$\beta_{2CP1} = -3623877 \pm 2.3155 \sqrt{10.164683 (8.96089 \times 10^9)}$$

$$-4322697.62 \leq \beta_{2CP1} \leq -2925056.38$$

$$\beta_{3CP1} = 181588693 \pm 2.3155 \sqrt{10.164683 (5.81126 \times 10^{13})}$$

$$125312424.48 \leq \beta_{3CP1} \leq 237864961.52$$

$$\beta_{1CP2} = 25994.2 \pm 2.3155 \sqrt{8.833319 (70504.1)}$$

$$24166.89 \leq \beta_{1CP2} \leq 27821.51$$

$$\beta_{2CP2} = -3842578 \pm 2.3155 \sqrt{8.833319 (7.54332 \times 10^9)}$$

$$-4440282.39 \leq \beta_{2CP2} \leq -3244873.61$$

$$\beta_{3CP2} = 195285547 \pm 2.3155 \sqrt{8.833319 (4.61478 \times 10^{13})}$$

$$148535647.83 \leq \beta_{3CP2} \leq 242035446.17$$

$$\beta_{1CPPET1} = 28001 \pm 2.3518 \sqrt{9.278786 (220207)}$$

$$24639.23 \leq \beta_{1CPPET1} \leq 31362.77$$

$$\beta_{2CPPET1} = -2949234 \pm 2.3518 \sqrt{9.278786 (4.94214 \times 10^{10})}$$

$$-4541845.92 \leq \beta_{2CPPET1} \leq -1356622.08$$

$$\beta_{3CPPET1} = 46193551 \pm 2.3518 \sqrt{9.278786 (6.26278 \times 10^{14})}$$

$$-133088172.44 \leq \beta_{3CPPET1} \leq 225475274.44$$

$$\beta_{1CPPET2} = 30944 \pm 2.3518 \sqrt{7.214918 (234955)}$$

$$27881.93 \leq \beta_{1CPPET2} \leq 34006.07$$

$$\beta_{2CPPET2} = -4130527 \pm 2.3518 \sqrt{7.214918 (5.56784 \times 10^{10})}$$

$$-5621143.53 \leq \beta_{2_{CPPET2}} \leq -2639910.47$$

$$\beta_{3_{CPPET2}} = 153202747 \pm 2.3518 \sqrt{7.214918 (7.53023 \times 10^{14})}$$

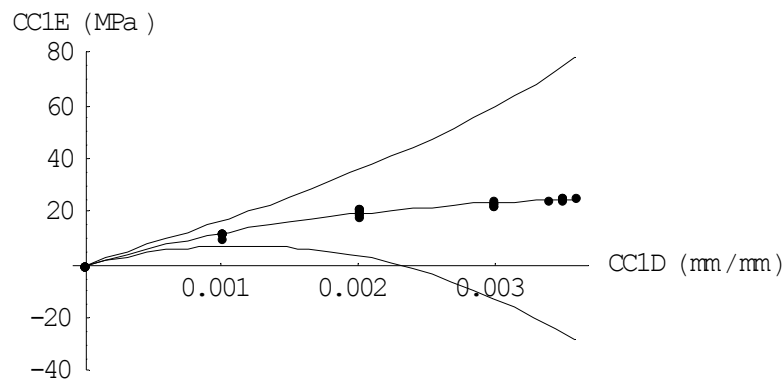
$$-20148384.84 \leq \beta_{3_{CPPET2}} \leq 326553878.84$$

Con estos intervalos de confianza, se pueden construir nuevas curvas, que permitirán calcular las tenacidades límite, alrededor de la tenacidad más probable en cada caso. Estos resultados se muestran a continuación gráficamente (se usará MATHEMATICA).

Por ejemplo, la curva superior de CC1 es:

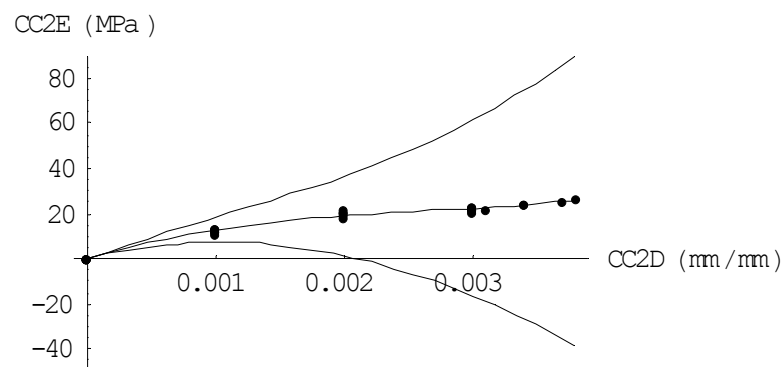
$$E_{CC1} = 16839.70D_{CC1} - 706129.61D_{CC1}^2 + 566639382.65D_{CC1}^3$$

Para CC1:



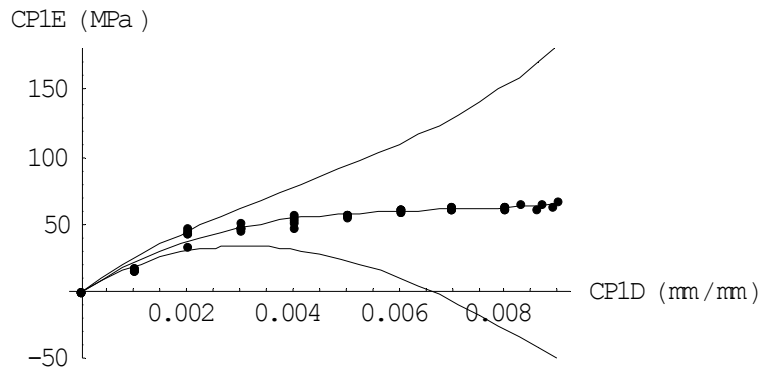
IC para tenacidad al 95%: [-0.0052978, 0.1219329]

Para CC2:



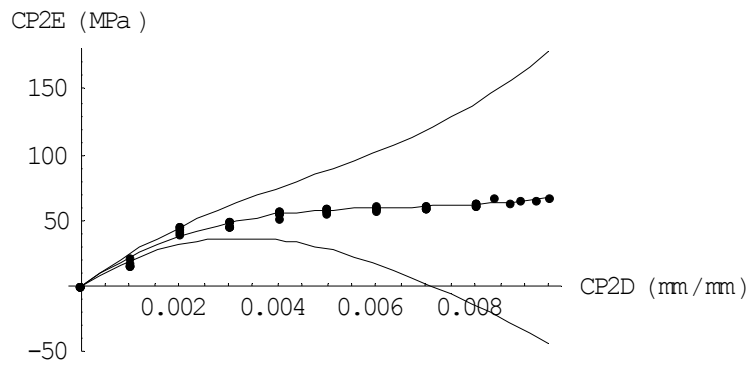
IC para tenacidad al 95%: [-0.0172813, 0.1443411]

Para CP1:



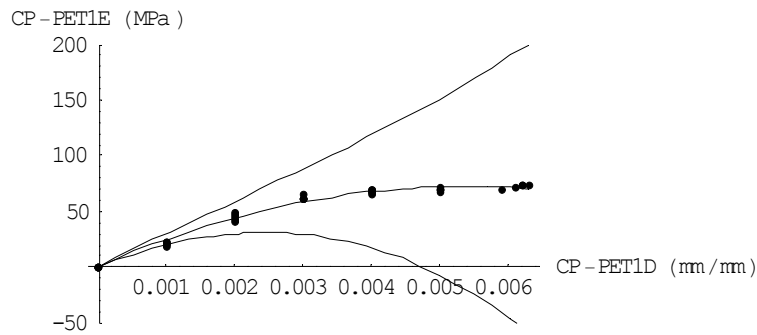
IC para tenacidad al 95%: [0.0921867, 0.7838509]

Para CP2:



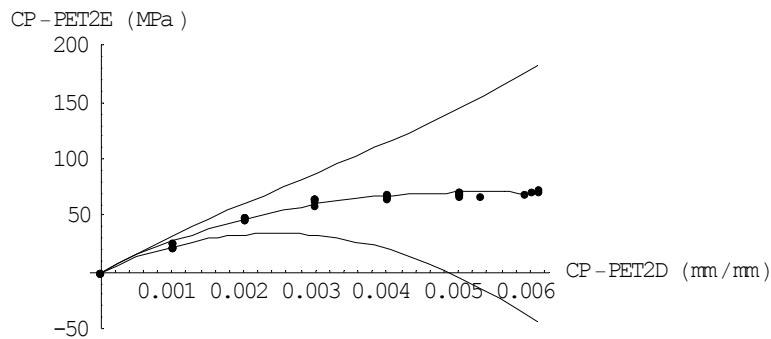
IC para tenacidad al 95%: [0.1239932, 0.8209363]

Para CPPET1:



IC para tenacidad al 95%: [0.0579939, 0.5981187]

Para CPPET2:



IC para tenacidad al 95%: [0.0864714, 0.5459818]

Es importante aclarar que los valores de los extremos de estos intervalos se calcularon como las áreas bajo las curvas construidas con los parámetros extraídos de los intervalos de confianza para β_1 , β_2 y β_3 .

Se puede verificar que los promedios de los extremos de las tenacidades coinciden con los que se habían calculado originalmente, ya que las integrales son operadores lineales y este hecho justifica que los intervalos de las tenacidades también sean del 95%.

La siguiente tabla resume los intervalos de confianza del 95% para las tenacidades de cada muestra (los valores de tenacidad negativos deben ignorarse, surgen por la falta de ajuste):

MATERIAL	IC 95% TENACIDAD (<i>Joules / m³</i>)
CC1	58317.6 ± 63615.4
CC2	63529.9 ± 80811.2
CP1	438018.8 ± 345832.1
CP2	472464.8 ± 348471.6
CP-PET1	328056.3 ± 270062.4
CP-PET2	316226.6 ± 229755.2

Tabla 6.12 Intervalos de confianza para la tenacidad

ANÁLISIS DE RESIDUALES.

En el Capítulo 5, se establecieron cinco premisas que debían quedar satisfechas para validar un modelo de regresión lineal múltiple:

1. La relación entre la respuesta y los regresores es lineal, al menos en forma aproximada.
2. El término de error ε tiene media cero.
3. El término de error ε tiene varianza σ^2 constante.
4. Los errores no están correlacionados.
5. Los errores tienen distribución normal.

El primer supuesto parece cumplirse, pues las gráficas (que provienen de un modelo lineal) parecen ajustarse bien a las observaciones.

El segundo supuesto, no se cumplirá en nuestro modelo, ya que éste fue forzado a pasar por el origen, sin embargo, la suma de los residuales debe ser una cantidad “pequeña”.

La siguiente tabla muestra la suma de los residuales:

MATERIAL	Suma de Residuales (MPa)
CC1	-0.4701
CC2	-0.8262
CP1	-7.1452
CP2	-8.3363
CP-PET1	-9.0418
CP-PET2	-7.2910

Tabla 6.13 Suma de los residuales

Si observamos los esfuerzos de la Tabla 6.4, podemos decir que las sumas de residuales se mantienen suficientemente pequeñas, considerando que el modelo está forzado a pasar por el origen.

Las Figuras 6.4 a 6.9 (páginas: 133 a 139), muestran un análisis gráfico de residuales hecho con MINITAB⁴ en el que esencialmente se observa que los residuales se distribuyen más o menos normalmente alrededor de cero, aunque hay algunos casos sesgados, no parece haber problema grave de normalidad.

No parece haber ninguna correlación entre el orden de las observaciones y los residuales.

Tampoco se ven problemas de correlación entre los residuales y los valores estimados con el modelo.

Y no hay evidencia clara de heteroscedasticidad, ya que los cambios en las varianzas de los residuales, para los diferentes niveles de deformación específica, no son muy grandes.

La siguiente tabla muestra tres diferentes pruebas de normalidad para los residuales, en las que la hipótesis nula es: “Los residuales tienen una distribución normal”.

MATERIAL	Anderson – Darling Valor P	Ryan – Joiner Valor P	Kolmogorov – Smirnov Valor P
CC1	0.133	> 0.100	> 0.150
CC2	0.326	> 0.100	> 0.150
CP1	< 0.005	< 0.010	< 0.010
CP2	< 0.005	< 0.010	0.031
CP-PET1	0.846	> 0.100	> 0.150
CP-PET2	0.202	> 0.100	> 0.150

Tabla 6.14

Se puede hablar de normalidad para CC y CP-PET, pero CP parece presentar cierta falta de normalidad, aunque este hecho no afecta mucho a nuestros fines, ya que la tenacidad mide la energía de deformación por unidad de volumen y la falta de normalidad en los residuales

de los esfuerzos afectaría sólo las predicciones de éstos para niveles mayores de deformación.

COMPARACIÓN DE TENACIDADES.

En esta sección se hará un **Análisis de Varianza** para comparar los valores medios de las tenacidades de los tres tipos de concreto estudiados.

La prueba de hipótesis es:

$$H_0 : \mu_{T_{CC}} = \mu_{T_{CP}} = \mu_{T_{CP-PET}}$$

$$H_1 : \mu_{T_{CC}} \neq \mu_{T_{CP}} \neq \mu_{T_{CP-PET}} \text{ o para al menos una pareja de tenacidades}$$

El estadístico de prueba para el análisis de varianza se resume en la siguiente tabla:

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F ₀
Entre los tratamientos	$SS_{TOT} = n \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot})^2$	$a - 1$	MS_{TRAT}	$F_0 = \frac{MS_{TRAT}}{MS_E}$
Error (dentro de los tratamientos)	$SS_E = SS_{TOT} - SS_{TRAT}$	$N - a$	MS_E	
Total	$SS_{TOT} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{\cdot\cdot})^2$	$N - 1$	<i>N</i> : número total de datos. <i>n</i> : número de datos por tratamiento. <i>a</i> : número de tratamientos.	

Tabla 6.15 Análisis de varianza

Aquí están los datos:

TENACIDADES	Tratamiento 1 (CC)	Tratamiento 2 (CP)	Tratamiento 3 (CP-PET)
T ₁ (MJoules/m ³)	0.0583176	0.4380188	0.3280563
T ₂ (MJoules/m ³)	0.0635299	0.4724648	0.3162266

Tabla 6.16 Valores de las tenacidades medias estimadas

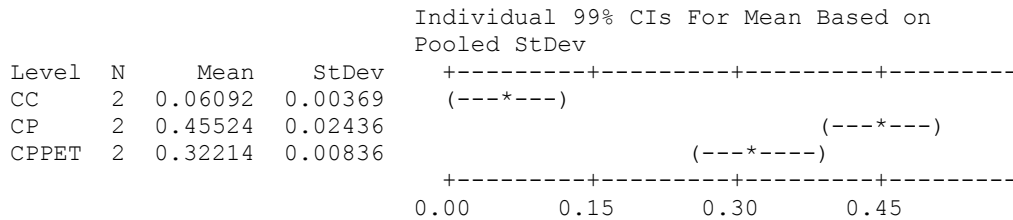
Ahora se muestra el análisis de varianza hecho con MINITAB:

One-way ANOVA: Tenacidad versus Trat

Source	DF	SS	MS	F	P
Trat	2	0.160958	0.080479	356.72	0.000
Error	3	0.000677	0.000226		

Total 5 0.161635

S = 0.01502 R-Sq = 99.58% R-Sq(adj) = 99.30%



Pooled StDev = 0.01502

Como puede verse, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que los tres tratamientos son significativamente diferentes.

Ahora se efectuarán dos análisis de comparaciones múltiples para los promedios de las tenacidades de cada combinación binaria de materiales.

Prueba de Tukey.

En esta prueba, el nivel de significación global es exactamente α cuando los tamaños de las muestras son iguales y es a lo sumo α cuando son diferentes.

El procedimiento de Tukey hace uso de la distribución del estadístico del rango studentizado: $q = \frac{\bar{y}_{\max} - \bar{y}_{\min}}{\sqrt{MS_E/n}}$ donde \bar{y}_{\max} y \bar{y}_{\min} son las medias muestrales mayor y menor, respectivamente, sacadas de un grupo de $p = a$ medias muestrales. La tabla VIII del apéndice de la referencia 1 de este capítulo, contiene los valores de $q_\alpha(p, f)$, los puntos porcentuales α superiores de q , donde $f = N - a$ es el número de grados de libertad asociados con MS_E . Para tamaños de las muestras iguales, la prueba de Tukey declara que dos medias son significativamente diferentes si el valor absoluto de sus diferencias muestrales excede:

$$T_\alpha = q_\alpha(a, f) \sqrt{\frac{MS_E}{n}}$$

Cuando las muestras son de diferente tamaño:

$$T_{\alpha} = \frac{q_{\alpha}(a, f)}{\sqrt{2}} \sqrt{MS_E \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$$

Los intervalos de confianza quedan:

$$\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{j\cdot} - T_{\alpha} \leq \mu_i - \mu_j \leq \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{j\cdot} + T_{\alpha} \quad ; \quad i \neq j$$

He aquí los resultados obtenidos con MINITAB:

Tukey 99% Simultaneous Confidence Intervals
All Pairwise Comparisons among Levels of Trat

Individual confidence level = 99.51%

Trat = CC subtracted from:

Trat	Lower	Center	Upper
CP	0.28152	0.39432	0.50711
CPPET	0.14842	0.26122	0.37401

Trat = CP subtracted from:

Trat	Lower	Center	Upper
CPPET	-0.24589	-0.13310	-0.02031

Calculemos $T_{0.01} = \frac{q_{0.01}(0.01, 6-3)}{\sqrt{2}} \sqrt{0.000226 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)} = \frac{10.6}{\sqrt{2}} \sqrt{0.000226} = 0.1127$.

Nota: el valor 10.6 fue extraído de la tabla VIII del apéndice de la referencia 1 de este capítulo.

Como:

$$MS_{CP} - MS_{CC} = 0.45524 - 0.06092 = 0.39432 > 0.1127$$

$$MS_{CPPET} - MS_{CC} = 0.32214 - 0.06092 = 0.26122 > 0.1127$$

$$MS_{CP} - MS_{CPPET} = 0.45524 - 0.32214 = 0.13310 > 0.1127$$

Se concluye que las tres diferencias son significativas.

Prueba de Fisher (método de la diferencia significativa mínima).

Este procedimiento usa el estadístico:

$$t_0 = \frac{\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{j\bullet}}{\sqrt{MS_E \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}}$$

para probar: $H_0 : \mu_i = \mu_j$, suponiendo una hipótesis alternativa de dos colas, los pares de medias μ_i y μ_j se declararían significativamente diferentes si:

$$|\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{j\bullet}| > t_{\alpha/2, N-a} \sqrt{MS_{RE} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}.$$

A la cantidad $DSM = t_{\alpha/2, N-a} \sqrt{MS_{RE} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$ se le llama diferencia significativa mínima.

He aquí los resultados de MINITAB:

Fisher 99% Individual Confidence Intervals
All Pairwise Comparisons among Levels of Trat

Simultaneous confidence level = 97.97%

Trat = CC subtracted from:

Trat	Lower	Center	Upper
CP	0.30659	0.39432	0.48205
CPPET	0.17349	0.26122	0.34895

-+-----+-----+-----+-----+
 (----*----)
 (----*----)
 -+-----+-----+-----+-----+
 -0.20 0.00 0.20 0.40

Trat = CP subtracted from:

Trat	Lower	Center	Upper
CPPET	-0.22083	-0.13310	-0.04537

-+-----+-----+-----+-----+
 (----*----)
 -+-----+-----+-----+-----+
 -0.20 0.00 0.20 0.40

Calculemos DSM:

$$DSM = t_{0.005,3} \sqrt{MSE \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)} = 7.4532 \sqrt{0.000226 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)} = 0.1120$$

De la tabla de MINITAB, se extrae que:

$$MS_{CP} - MS_{CC} = 0.45524 - 0.06092 = 0.39432 > 0.1120$$

$$MS_{CPPET} - MS_{CC} = 0.32214 - 0.06092 = 0.26122 > 0.1120$$

$$MS_{CP} - MS_{CPPET} = 0.45524 - 0.32214 = 0.13310 > 0.1120$$

Lo cual implica que las tres comparaciones resultan con diferencias significativas.

Referencias de este capítulo.

1. Diseño y Análisis de Experimentos. Douglas C. Montgomery. Ed. Limusa – Wiley.
2. Introducción al análisis de regresión lineal. Montgomery. Peck. Vining. Ed. CECSA.
3. The MATHEMATICA Book. Wolfram Research.
4. Help. MINITAB.