Apéndice A

Antecedentes de Control

Para cualquier tipo de análisis de sistemas de control, es importante establecer ciertos conceptos básicos.

Sistemas de control retroalimentados Un sistema que mantiene una relación prescrita entre la salida y la entrada de referencia, comparándolas y usando la diferencia como medio de control, se denomina sistema de control retroalimentado.

Función de transferencia: Es una función que relaciona algebraicamente la salida de un sistema lineal estacionario a la entrada del mismo. Esta función permite separar la entrada, el sistema y la salida en 3 partes separadas y distintas a diferencia de la ecuación diferencial. Esta función a su vez, permite combinar matemáticamente representaciones de subsistemas para alcanzar la representación total de un sistema.

Representación de un sistema en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo:

Dependiendo del sistema de que se trate y de las circunstancias específicas, un modelo matemático puede ser más conveniente que otro. Por ejemplo, en problemas de control óptimo, es mas útil usar representaciones en el espacio de estados. En cambio, para los análisis de respuesta transitoria o de la respuesta en frecuencia de sistemas lineales con una entrada y una salida invariantes en el tiempo, la representación mediante funciones de transferencia puede ser más conveniente que cualquier otra.

Para el análisis y el diseño de sistemas de control por retroalimentación, hay dos técnicas disponibles:

1) Técnica en el dominio de la frecuencia (clásica)

Esta técnica se basa en convertir la ecuación diferencial que describe al sistema, a una función de transferencia, generandose así un modelo matemático del sistema que relaciona algebraicamente la representación de la salida a la representación de la entrada. Reemplazar la ecuación diferencial por una ecuación algebraica no solo simplifica la representación de subsistemas individuales, sino que también simplifica el modelamiento de subsistemas interconectados. La desventaja de esta técnica es que solo se puede aplicar a sistemas lineales invariantes en el tiempo o sistemas que puedan aproximarse a estos.

Una ventaja de la técnica en el dominio de la frecuencia es que nuestra intuición mejora por medio de herramientas matemáticas que rápidamente dan información sobre estabilidad y respuesta transitoria, así podemos ver rápidamente el efecto que tendría sobre el sistema variar sus parámetros hasta alcanzar un diseño aceptable.

2) Técnica en el dominio del tiempo

Conocido también como método de espacio de estados, es un método unificado de modelado, análisis y diseño para una amplia gama de sistemas; por ejemplo se puede utilizar para representar sistemas no lineales.

La técnica de dominio del tiempo permite que el sistema sea simulado informáticamente. Este método se utiliza en optimización.

Sistemas lineales invariantes en el tiempo LTI: Una ecuación diferencial es lineal si sus coeficientes son constantes o son funciones solo de la variable independiente. Los sistemas dinámicos formados por componentes de parámetros lineales invariantes en el tiempo se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo (de coeficientes constantes) . Tales sistemas se denominan " Sistemas lineales invariantes con el tiempo " (lineales de coeficientes constantes).

Los sistemas que se representan por medio de ecuaciones diferenciales cuyos coeficientes son funciones del tiempo, se denomina lineales variantes con el tiempo. Un ejemplo de un sistema de control variante con el tiempo es un sistema de control de naves espaciales.

Estabilidad De las características mas importantes del comportamiento dinámico de un sistema de control es la estabilidad, ya que no se puede diseñar un sistema inestable para un requerimiento especifico de respuesta transitoria ó de error en estado estable.

La respuesta total de un sistema es la suma de su respuesta natural mas su respuesta forzada.

Un sistema LTI es estable si su respuesta natural se aproxima a cero mientras el tiempo tiende a infinito. Por lo que un sistema de este tipo será inestable si su respuesta natural excede cierta magnitud o crece sin cota mientras el tiempo tiende a infinito. El sistema será marginalmente estable si su respuesta natural ni crece ni decrece, se mantiene constante u oscila mientras el tiempo tiende a infinito.

Tener polos en el semiplano complejo izquierdo generan un decaimiento exponencial o respuestas naturales senoidales amortiguadas. Sistemas inestables tienen funciones de transferencia con por lo menos un polo en el semiplano complejo derecho y/o polos con multiplicidad mayor a uno en el eje imaginario; polos con multiplicidad mayor a uno llevan a sumas de respuestas del tipo $At^n \cos(\omega t + \phi)$ donde $n = 1, 2, ...$ que también tiende a infinito cuando el tiempo tiende a infinito.

Sistemas marginalmente estables cuentan con funciones de transferencia cuyos polos pueden estar en el eje imaginario y de multiplicidad uno y/o caer en el semiplano complejo izquierdo.

Por lo anterior podemos concluir que sistemas estables tienen funciones de transferencia a lazo cerrado con polos en el semiplano complejo izquierdo.

Graficas de Mikhailov En 1938, Mikhailov propuso un criterio de estabilidad que puede ser formulado de la siguiente manera:

Un polinomio de la forma $p(s) = p_0 + p_1 s + ... + p_n s^n$ donde $p_n > 0$ es estable si su gráfica de frecuencia $p(j\omega)$:

- Empieza en el eje real positivo.
- Encircula en contra de las manecillas del reloj el origen con un incremento de fase de $\frac{n\pi}{2}$ conforme ω va de 0 a $+\infty$.

Criterio de estabilidad de Niquist: El criterio de Niquist relaciona la estabilidad de un sistema a lazo-cerrado con la respuesta a la frecuencia a lazo-abierto y la localización de polos a lazo-abierto. Es decir, tener información sobre la respuesta a la frecuencia a lazo-abierto nos proporciona información acerca de la estabilidad del sistema a lazo-cerrado. Para entender correctamente el criterio de estabilidad de Nyquist es muy importante tener muy claros los siguientes puntos:

1. La relación que existe entre los polos de la ecuación característica $1 + G(s)H(s)$ y los polos de la ecuación para lazo abierto $G(s)H(s)$.

2. La relación que existe entre los ceros de la ecuación característica $1+G(s)H(s)$ y los polos a lazo cerrado de la función de transferencia $T(s) = \frac{G((s)}{1+G(s)H(s)}$.

3. El concepto de mapeo de puntos.

4. El concepto de mapeo de contornos; Mapear un contorno A, a través de una función F(s) en un contorno B.

Para el mapeo de contornos es importante notar que si se asume el mapeo en favor de las manecillas del reloj para mapear los puntos del contorno A (plano-s), entonces el mapeo del contorno B mapea también a favor de las manecillas del reloj si la función F(s) tiene solo ceros, y en contra de las manecillas del reloj si la función F(s) tiene solamente polos. También que si el polo o cero de la función F(s) es encirculado por el contorno A, el mapeo encirculará el origen. Se puede dar el caso en el que un polo y un cero de F(s) estén dentro del contorno A y se cancelen , por lo que el mapeo no encirculará el origen.

Este criterio plantea que existe una relación única entre el número de polos de F(s) contenidos dentro del contorno A, el número de ceros de F(s) dentro del contorno A y el número de encierros del origen en contra de las manecillas del reloj durante el mapeo del contorno B. Esta relación se puede usar para determinar la estabilidad de un sistema a lazo cerrado.

” Si el contorno A, que encircula completamente el semiplano complejo derecho es mapeado a través de $G(s)H(s)$, entonces el número de polos a lazo cerrado, Z, en el semiplano complejo derecho, iguala el número de polos a lazo abierto, P, que están en el semiplano complejo derecho menos el número de encirculmientos en contra de las manecillas del reloj, N, alrededor de -1 en el mapeo; esto es $Z = P - N$. El mapeo se conoce como diagrama de Nyquist de $G(s)H(s)$”.

Perturbación Una perturbación es una señal que tiende a afectar negativamente el valor de la salida de un sistema.

Incertidumbre: Dado que no podemos predecir exactamente cual será la salida de un sistema físico aún conociendo la entrada, pues al modelar sistemas dinámicos normalmente se tienen que ignorar ciertas no linealidades. Si el efecto que estas propiedades ignoradas tienen sobre la respuesta son pequeños se obtendrá un buen acuerdo entre los resultados del análisis de un modelo matemático y los resultados del estudio experimental del sistema físico. A todo esto se le conoce como incertidumbre. La incertidumbre proviene de dos fuentes;

Entradas desconocidas o impredecibles (ruido, perturbaciones etc)

Dinámicas impredecibles.

Control simultaneo: El control simultaneo se refiere al diseño de un controlador que controla a varias plantas de diferentes ordenes simultáneamente.

Control Robusto: El control robusto se refiere al diseño de un controlador que controla familias de plantas con variación de parámetros; sin modificar el orden de la planta. Es decir, un sistema es robusto si el análisis de estabilidad a partir del modelo nominal se conserva en el sistema real a pesar de las inexactitudes del modelo y de la influencia de perturbaciones.

Factorización coprima

Siendo $p(s)$ una función de transferencia cuyo numerador y denominador son dos polinomios coprimos:

$$p(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

Por medio del algoritmo de Euclides, es posible obtener otros dos polinomios x , y que satisfagan la siguiente ecuación:

$$n(s)x(s) + d(s)y(s) = 1$$

Si consideramos $n(s)x(s)+d(s)y(s)$ como el polinomio característico y a sabiendas que el sistema es internamente estable si este polinomio no tiene ceros en el semiplano complejo derecho, entonces podremos definir al controlador de la siguiente manera:

$$c(s) = \frac{x(s)}{y(s)}$$

ya que el polinomio característico de un sistema retroalimentado tiene la forma : $n_p(s)n_c(s) + d_p(s)d_c(s)$, (numerador por numerador y denominador por denominador). Como se puede ver, nos enfrentamos con la situación de que y podría ser cero, o aún cuando y no sea cero se tiene el caso de que $c(s)$ no sea una función racional propia. Para evitar estos posibles problemas ponemos la restricción de que $n(s), x(s), d(s), y(s)$ sean elementos de la familia de todas las funciones reales, racionales, estables y propias en lugar de polinomios. Dos funciones n y d en $\mathbb{R}H^\infty$ son coprimas si existen otras dos funciones x, y también pertenecientes a $\mathbb{R}H^\infty$ que satisfagan la ecuación:

$$n(s)x(s) + d(s)y(s) = 1.$$

Es importante notar que para que esta ecuación se cumpla n y m no pueden tener ceros comunes en el semiplano complejo derecho ni en ∞. A esto se le conoce como factorización coprima de $p(s)$ sobre $\mathbb{R}H^\infty$.

Resumiendo podemos establecer lo siguiente: Sea $p(s) \in \mathbb{R}H^\infty$ con $p(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ si $n(s), d(s) \in \mathbb{R}H^\infty$ y se cumple la siguiente identidad: $n(s)q_1(s) + d(s)q_2(s) = 1$ donde $q_1(s), q_2(s) \in \mathbb{R}H^\infty$, entonces $(n(s), d(s))$ es una factorización coprima de $p(s)$.